

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie mécanique

Méthodes de prévision acoustique
semi-analytiques pour un doublet d'hélices
contrarotatives isolé

Thèse de doctorat
Spécialité : génie mécanique

Michael QUAGLIA

Jury : Stéphane MOREAU (directeur)
Michel ROGER (co-directeur)
Laurence VION
Fabrice FALISSARD
Alain DESROCHERS

RÉSUMÉ

Les doublets d'hélices contra-rotatives (CROR) sont un moyen alternatif aux turbofans actuels pour propulser les avions commerciaux. Un CROR est composé de 2 soufflantes coaxiales non carénées tournant dans des sens opposés. Actuellement, les CROR pourraient réduire les émissions de CO_2 mais les émissions sonores pourraient être un frein à leur commercialisation. Au décollage et en condition d'approche, le son est principalement créé par la charge instationnaire subie par un des rotor. Cette charge provient de l'interaction d'un des rotors avec des fluctuations de vitesses périodiques produites par l'autre.

Ce bruit d'interaction provient principalement de 3 sources principales. La première est liée à l'interaction des sillages visqueux provenant du rotor amont qui se font découper par le bord d'attaque des pales du rotor aval. La seconde est liée au potentiel de vitesse créé par le bord d'attaque des pales du rotor aval qui influence les vitesses vues au bord de fuite des pales du rotor amont. La dernière provient de l'interaction des pales du rotor aval avec les tourbillons d'extrémités créés en tête ou en pied de pale du rotor amont. Cette dernière interaction s'est avérée principale pour des conditions d'approche et de décollage. Pour réduire l'interaction tourbillon de tête - pale aval pour des conditions nominales de vol, le rayon maximal des pales du rotor aval est rogné. Le rognage classique est obtenu pour les conditions de décollage et d'approche où l'effet de contraction de la veine fluide est le plus important. Cependant, le CROR est alors considéré avec un écoulement uniforme sans angle d'incidence. Avant de prendre en compte les effets d'incidences, il peut être intéressant de prendre en compte l'angle de contraction de la veine fluide qui pour certaines configurations et points de fonctionnement est suffisant pour réactiver l'interaction pale-tourbillon. L'interaction est alors tridimensionnelle, toutes les composantes de la vitesse du tourbillon contribuent au bruit émis.

Le but de cette étude sera d'analyser l'influence de la contraction de la veine fluide et des trois composantes de la vitesse du tourbillon de tête sur la charge instationnaire vu par la pale aval. Ces améliorations seront implémentées dans un outil de prévision de bruit de turbomachines : Optibruit. Une étude paramétrique préliminaire sera faite sur cette source.

Les retombées de cette étude sont doubles. Tout d'abord, une meilleure compréhension des mécanismes d'interactions entre un tourbillon et une pale tournante dans des conditions réalistes sera possible. Ensuite, un outil rapide d'évaluation préliminaire du bruit provenant de l'interaction pale-tourbillon sera incorporé dans le but de pouvoir effectuer une optimisation aéroacoustique sur des géométries préliminaires.

Mots-clés : Hélices contra-rotatives, aéroacoustique, modélisation de tourbillons, turbomachines, bruit tonal, bruit à large bande

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse, Stéphane Moreau, Michel Roger et Laurence Vion pour leur soutien, conseils et grande disponibilité lors des différentes étapes de ma thèse. Je voudrais particulièrement les remercier pour leur patience lors de la lecture des différentes version de mon manuscrit. Je voudrais aussi remercier Rasika Fernando qui m'a accompagné pendant mes deux premières années de thèse ; son soutien était salulaire. Je remercie aussi la chaire industrielle d'aéroacoustique de l'Université de Sherbrooke pour avoir financé cette thèse.

Au sein du groupe d'aéroacoustique de l'UdeS, je tiens à remercier Marlène Sanjosé pour ses conseils et son aide précieuse mais aussi Thomas, Gabriele, Chaofan, Dominic, Praateek, Dipali , Safouane, Aurélien, Hao, Manqi, Carlos et Yann. En France, j'exprime ma gratitude envers Nassim et au code Orion, Vianey, Benjamin, Simon et Majd ainsi que tous les thésards du bureau d'à côté.

Je tiens aussi à nommer Léo (Helmut), Julien et Quentin qui ont eu à travailler avec moi mais aussi Laurent Soulat et Irwin Kernemp pour leurs résultats des calculs CFD sur la configuration FL05/AL05 ainsi qu'à Thomas Nodé-Langlois pour ses résultats sur la configuration HeRa III.

Je remercie mes parents pour leur compréhension et leur présence rassurante ainsi que Capucine qui a illuminé mon cœur lors de la difficile période d'écriture. Pour finir, je souhaite mentionner le soutien de Martha, Sam et Arnaud-kun, ma famille d'adoption lors de ces trois années au Québec.

Un doublet d’hélices contrarotatives accordé ? Il est intéressant de considérer un doublet d’hélices avec B_1 pales amont et B_2 pales aval tournant à la pulsation $\Omega = 88\pi$ rad.s⁻¹ dans des directions opposées. Sans montrer les détails (expliqué à la Section 1.1.1), on note que la pulsation fondamentale de chacun des rotors est $B_1\Omega$ et $B_2\Omega$ respectivement pour le rotor amont et aval.

On notera par ailleurs qu’en musique occidentale, une tierce majeure juste est l’intervalle séparant deux sons dont les fréquences fondamentales sont au rapport 5/4. Il existe aussi, la quarte majeure (rapport 4/3) et la quinte majeure (rapport 3/2). Ces intervalles sont considérés comme étant justes puisqu’*agréables* à l’oreille.

Connaissant ces notions de tierces, quartes et quintes il est alors amusant de noter que si les pulsations de rotations des rotors sont identiques alors seulement certains rapports de pales permettront de sonner *juste*. Le Tableau 1 présente quelques configurations qui sonneront alors juste. De cette manière, le doublet d’hélices évitera ce que l’on appelle le loup acoustique.

B_1	♩ jouée	B_2	♩ jouée	Intervalle <i>joué</i>
10	La (3)	8	Fa (3)	Tierce juste
12	Do (4)	9	Sol (3)	Quarte juste
15	Mi (4)	10	La (3)	Quinte juste

Tableau 1 Intervalles joués pour des doublets d’hélices contrarotatives à la pulsation de rotation $\Omega = 88\pi$ rad.s⁻¹ pour les deux rotors.

Après cette démonstration amusante, on citera le père Blaise dans la série Kaamelott :

“Voilà ! C’est tout ce qu’y a ! Unisson, quarte, quinte et c’est marre ! Tous les autres intervalles, c’est de la merde ! Le prochain que je chope en train de siffler un intervalle païen, je fais un rapport au pape !”

- Jean-Robert Lombard, Kaamelott, Livre II, 48 : La Quinte juste, écrit par
Alexandre Astier.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xv
LISTE DES SYMBOLES	xvii
LISTE DES ACRONYMES	xxi
INTRODUCTION	1
Le doublet d'hélices contrarotatives (DHCR)	1
Concepts préliminaires	2
La décennie dorée des CROR	3
Les configurations CROR modernes	6
Problématique et organisation du manuscrit	7
1 MÉTHODE DE PRÉVISION DU BRUIT DES DHCR	9
1.1 Introduction	9
1.1.1 Bruit tonal	9
1.1.2 Bruit à large bande	13
1.2 Rayonnement des sources de bruit aérodynamiques	15
1.2.1 Méthodes intégrales (analogies acoustiques)	15
1.2.2 Méthodes numériques	24
1.2.3 Conclusions	25
1.3 Calcul des sources acoustiques	26
1.3.1 Méthodes numériques	26
1.3.2 Méthodes analytiques	29
1.3.3 Conclusions	32
1.4 Méthodologie adoptée	33
1.5 Définition des repères	34
1.5.1 Repère global	34
1.5.2 Repères associés aux fluctuations de vitesses	35
1.5.3 Repères associés aux pales du rotor aval	38
2 FLUCTUATIONS DE VITESSE INCIDENTES	39
2.1 Introduction	39
2.2 Modélisation du tourbillon	40
2.2.1 Description d'un tourbillon	40
2.2.2 Éléments de la dynamique tourbillonnaire	41
2.2.3 Modélisation des vitesses tourbillonnaires	53
2.2.4 Détection de la trajectoire d'un tourbillon	60

2.2.5	Diffusion du tourbillon	63
2.2.6	Application au cas FL05/AL05	64
2.3	Séparation sillage / tourbillon	77
2.3.1	Introduction	78
2.3.2	Méthode basée sur une fonction de filtrage	79
2.3.3	Application au cas FL05/AL05	82
2.4	Modélisation des sillages turbulents	85
2.4.1	Description d'un sillage turbulent	85
2.4.2	Éléments de la modélisation des sillages turbulents	86
2.4.3	Application au cas FL05/AL05	92
3	CALCUL DES RÉPONSES DE PALE	99
3.1	Introduction	99
3.2	Méthodologie	99
3.3	Obtention des <i>upwash</i>	101
3.3.1	Projection spatiale	101
3.3.2	Passage dans le domaine spectral	103
3.4	Utilisation de la méthodologie classique d'Amiet-Schwarzschild	104
3.4.1	Mise en place	105
3.4.2	Solution formelle	110
3.5	Modification de la condition aux limites à l'extrémité de pale	115
3.5.1	Conditions de type bord de fuite	115
3.5.2	Condition de type bord d'attaque	117
3.6	Validation sur la configuration FL05/AL05	120
3.6.1	Calcul des <i>upwash</i>	120
3.6.2	Sources acoustiques	124
4	BRUIT TONAL	139
4.1	Introduction	139
4.2	Propagation acoustique autour d'une plaque plane fixe	139
4.2.1	Intégrales de rayonnements suivant la corde	143
4.2.2	Bruit produit par une série d'OBVI sur une plaque plane fixe	146
4.3	Rayonnement acoustique d'une source en rotation	153
4.4	Validation sur la configuration FL05/AL05	155
4.4.1	Comparaison avec les résultats numériques et expérimentaux	161
4.5	Conclusions	165
5	BRUIT À LARGE BANDE	167
5.1	Introduction	167
5.2	Bruit d'interaction de sillages turbulents (BRWI)	167
5.2.1	Hypothèses géométriques et cinématiques	168
5.2.2	Calcul des sources acoustiques	170
5.2.3	Sillages turbulents	171
5.2.4	Solution pour les sources acoustiques	176
5.2.5	Expression de S_{pp}	177

5.3	Intégrale de rayonnement avec prise en compte de la flèche	180
5.4	Résultats	183
5.4.1	Configuration canonique	183
5.4.2	Configuration FL05/AL05	186
5.5	Conclusions	186
6	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	189
6.1	Conclusions	189
6.1.1	Bruit tonal	189
6.1.2	Bruit à large bande	191
6.2	Perspectives	192
6.2.1	Bruit tonal	192
6.2.2	Bruit à large bande	193
	ANNEXES	193
A	CFD de référence	195
A.1	Description de la géométrie	195
A.2	Point de fonctionnement	195
A.3	Paramètres numériques	196
A.3.1	Domaine de calcul	196
A.3.2	Maillage	196
A.3.3	Solveur aérodynamique	197
A.4	Résultats aérodynamiques	199
A.4.1	Coupes à rayon constant	199
A.4.2	Pression instationnaire à la surface des pales	200
B	Formulation du problème du rayonnement acoustique d'un dipôle tour-	
	nant avec effet de vol	203
B.1	Méthodologie	203
B.2	Rappel des repères utilisés	203
B.3	Solution formelle pour le terme de chargement	205
B.3.1	Coordonnées d'émission	205
B.3.2	Passage dans le domaine fréquentiel	206
B.3.3	Solution en champ lointain géométrique	207
B.3.4	Fonctions de Bessel	209
B.3.5	Formulation complète	210
B.3.6	Comparaison avec une méthode FWH temporelle	211
C	Projection des vitesses fluctuantes	213
C.1	Matrices de rotation utilisées	213
C.2	Expression du rayon du tourbillon	215
C.3	Fluctuation de vitesse générée par la vitesse azimutale du tourbillon	216
C.3.1	Modèle de Lamb-Oseen	217
C.3.2	Modèle de Scully	222
C.3.3	Modèle de Taylor	225

C.4	Fluctuation de vitesse générée par la vitesse axiale du tourbillon	227
D	Calcul de la correction d'extrémité avec condition d'annulation du po-	
	tentiel en tête de pale	229
D.1	Description du problème	229
D.2	Calcul des potentiels de vitesse	229
D.2.1	Terme de bord d'attaque	230
D.2.2	Terme de bord de fuite	231
D.3	Transformée de Fourier axiale des potentiels de vitesse	233
D.3.1	TF axiale du terme de bord d'attaque	234
D.3.2	TF axiale du terme de bord de fuite	235
D.4	Solutions de Schwarzschild	237
D.4.1	Équation des ondes convectées	237
D.4.2	Conditions aux limites	239
D.4.3	Potentiels de vitesse	239
D.4.4	Solutions en pression	240
E	Sources acoustiques élémentaires	241
E.1	Monopôle acoustique	242
E.2	Dipôle acoustique	242
E.3	Quadripôle acoustique	244
	LISTE DES RÉFÉRENCES	247

LISTE DES FIGURES

1	Géométrie CROR ©Safran Aircraft Engine.	1
2	Concepts préliminaires d'hélices contrarotatives (DHCR).	3
3	Concepts de CROR des années 80.	4
4	Pression acoustique (Sound Pressure Level ou SPL) en déciBel (dB) pour le DHCR F7/A3 mesurée pour un microphone en aval de la configuration obtenue par Gordon et Woodward [60]. La configuration est au décollage (nombre de Mach Axial 0,2 et nombre de Mach de rotation en tête de pale 0,63).	5
1.1	Pression acoustique intégrée pour toutes les fréquences tonales pour un arc de microphones situé à 10 diamètres du DHCR. 0° pointe à l'amont de la configuration. Le DHCR est 10x8 (10 pales pour $R1$ et 8 pales pour $R2$) en condition de décollage à nombre de Mach 0,2. Cette image est reproduite à partir des résultats de Stuermer et Yin [148].	11
1.2	Décomposition des fluctuations de vitesses déterministes pour un DHCR.	11
1.3	Décomposition des fluctuations de vitesses turbulentes pour un DHCR isolé.	14
1.4	Analogie acoustique de Ffowcs Williams et Hawkins [49].	16
1.5	Différence de pression acoustique pour un observateur proche du plan de rotation induite par la prise en compte du moyeu dans la propagation acoustique. L'illustration est extraite de [80].	18
1.6	Pression acoustique instantanée d'une source acoustique en rotation. La solution du champ de pression provient d'une configuration canonique présentée dans l'annexe B (dipôle tangentiel).	21
1.7	Schéma de compacité des sources acoustiques.	22
1.8	Pression acoustique pour un microphone à 1,16 m de l'axe de rotation (≈ 2 diamètres rotor) dans le plan de rotation. La géométrie est la F31/A31 (12x10) en régime de croisière (nombre de Mach axial 0,78 et 6848 tr/min pour $R1$ et $R2$) [42].	24
1.9	Pression acoustique instantanée à la BPF $_{R2}$ d'un DHCR installé sur l'empennage arrière d'un avion. La coupe est effectuée dans le plan de rotation du DHCR. L'illustration est extraite de [78].	25
1.10	Méthodologie globale adoptée. Les lignes pleines indiquent la méthodologie de validation. Les lignes en pointillés indiquent la méthodologie à l'étude dans ce travail.	34
1.11	Définition du repère global \mathfrak{R}_0	35
1.12	Repères intermédiaires pour la modélisation du tourbillon marginal.	36
1.13	Coupe aube à aube à R_c constant pour la modélisation des sillages.	37
1.14	Définition des repères associés aux pales aval.	38
2.1	Solutions de Laguerre pour quelques premiers ordres avec $C_m = \tau = 1$. . .	47
2.2	Modèle de Betz pour quelques premiers ordres.	49

2.3	Modèle de Carton-Mc.Williams avec circulation pour quelques premiers ordres.	51
2.4	Modèle de Carton-Mc.Williams sans circulation pour quelques premiers ordres.	51
2.5	Fonction $W_n(0)$ obtenue par Moore et Saffman [104].	52
2.6	Extractions nécessaires pour reconstruire la cinématique du tourbillon. . .	65
2.7	Composantes de la trajectoire du centre du tourbillon \mathbf{X}_v dans le repère global \mathfrak{R}_0 en utilisant plusieurs méthodes de détection.	66
2.8	Approximation de la trajectoire du centre du tourbillon \mathbf{X}_v dans le repère global \mathfrak{R}_0 à partir des entrées obtenus par différents critères de détection automatique de tourbillons.	67
2.9	Composantes de $\mathbf{t}_v(s)$ dans le repère global \mathfrak{R}_0 avant et après lissage. . . .	68
2.10	Vue globale de la reconstruction du tourbillon à différentes positions d'extraction. La ligne noire est la trajectoire du tourbillon. Les plans d'extraction sont proches du bord de fuite du rotor amont ($\approx 5\%$ de la distance $R1-R2$), à mi-distance ($\approx 50\%$ distance $R1-R2$) et près du bord d'attaque du rotor aval ($\approx 85\%$ distance $R1-R2$).	69
2.11	Extractions de la vorticité axiale pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.	70
2.12	Extractions des vitesses pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.	71
2.13	Interpolation de la vitesse azimuthale sur une grille régulière pour le plan situé à 50% de la distance $R1-R2$, voir fig. 2.12e.	72
2.14	Profils de vitesse pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.	73
2.15	Modèles 2D : comparaison numérique/analytique pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.	74
2.16	Modèles 3D : comparaison numérique/analytique pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.	75
2.17	Comparaison numérique/analytique pour la vitesse radiale dans le repère global \mathfrak{R}_0	76
2.18	Diffusion du tourbillon dans le volume inter-rotor.	78
2.19	Visualisation du plan d'extraction utilisé pour le modèle BRWI.	78
2.20	Test canonique pour la séparation entre sillages et tourbillons.	82
2.21	Extractions des fluctuations de la vitesse axiale (u_X) et tangentielle (u_Φ) dans le repère tournant avec le rotor amont au niveau du plan d'extraction indiqué sur la figure 2.19 en utilisant 21 courbes d'isovaleurs.	83
2.22	Valeur de la fonction filtrage utilisée pour la FL05/AL05. La fonction gaussienne f_1 est utilisée.	84
2.23	<i>Upwash</i> résultante avec ou sans filtrage du tourbillon. La fonction de filtrage est f_1 . Les paramètres d'affichage sont les mêmes que ceux de la figure 2.21.	84
2.24	Comparaison des <i>upwash</i> pour les différentes coupes décrites sur la figure 2.23a, avant et après filtrage.	85
2.25	Fonctions de modulation utilisées dans la littérature pour un sillage unique, dont le centre est en $y = 0$	87
2.26	Spectres des vitesses turbulentes pour les modèles de Von Kármán et de Liepmann. La vitesse de convection U varie alors que $\Lambda = 0,03$ m et $\bar{w}' = 0,04U$ m.s ⁻¹	92

2.27	Norme de la vitesse relative extrait au bord d'attaque des pales aval pour la configuration FL05/AL05.	93
2.28	Variations azimutales des paramètres turbulents pour la configuration FL05/AL05.	94
2.29	Extraction des paramètres aérodynamiques des sillages pour la configuration FL05/AL05 et comparaison aux résultats de Nodé-Langlois <i>et al.</i> [112].	96
2.30	Spectres des vitesses turbulentes pour les modèles de Von Kármán (lignes pleines) et de Liepmann (lignes pointillées) calculés aux mêmes rayons d'extraction que sur la figure 2.28.	97
3.1	Méthodologie pour le calcul des sources acoustiques liées au tourbillon.	100
3.2	Schéma du calcul des sources acoustiques.	106
3.3	Différentes zones pour la définition des conditions aux limites du problème.	110
3.4	Séparation du problème développé par Amiet [8]. Amplitude arbitraire des solutions \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE}	112
3.5	Distribution classique du saut de pression instationnaire réduit ($\sqrt{x'_{c2}}\tilde{l}$) pour différentes rafales obliques, lignes pleines : rafales supercritiques, lignes en pointillés : rafales subcritiques.	114
3.6	Représentation de la solution \hat{l}_t (CL de Kutta) dans le plan complexe pour une rafale supercritique, $M_0 = 0,5$, $\Psi = 20^\circ$, $\mu = 4,18$, $k_z^* = 2,48$ et $z_{c2}^* = -0,5$. Le chemin d'intégration est indiqué sur la figure 3.6a	117
3.7	Convergence de l'intégration numérique. Les paramètres cinématiques de la rafale incidente sont illustrés sur la figure 3.6. La croix indique la sélection des paramètres d'intégration pour la suite du développement.	118
3.8	Représentation de la solution \hat{l}_t (CL de bord d'attaque) dans le plan complexe pour une rafale supercritique, $M_0 = 0,5$, $\Psi = 20^\circ$, $\mu = 4,18$, $k_z^* = 2,48$ et $z_2^* = -0,5$. Le chemin d'intégration est indiqué sur la figure 3.8a.	119
3.9	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes \tilde{G} , sans angle de contraction de la veine fluide (β), $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$	121
3.10	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes \tilde{G} , avec angle de contraction de la veine fluide (β), $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$	122
3.11	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes \tilde{G} pour différents modèles de tourbillon 2D avec contraction de la veine fluide $\beta = 11^\circ$, échelle logarithmique : $20 \log_{10}(\tilde{G})$	123
3.12	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes \tilde{G}^{Ga} , sans angle de contraction de la veine fluide, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$ et $\gamma_2 = 40^\circ$	124
3.13	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes \tilde{G}^{Ga} , avec angle de contraction de la veine fluide, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$	124
3.14	Spectre bidimensionnel des <i>upwash</i> incidentes $\tilde{G} = \tilde{G}^{LO} + \tilde{G}^{Ga}$, avec angle de contraction de la veine fluide, $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$	125

3.15	Représentation de l'événement OBVI pour la configuration FL05/AL05. La géométrie de la pale aval est la surface rouge, la surface grise est une iso surface d'entropie. La surface maillée en bleu est la surface analytique utilisée dans la méthode d'A-S.	126
3.16	Saut de pression (\hat{l}_1) obtenu pour un tourbillon de Lamb-Oseen à la 1 ^{ère} harmonique de charge avec et sans contraction de la veine fluide β . Les valeurs sont adimensionnées par la pression atmosphérique standard. Vingt lignes d'iso valeurs sont retenues. Les paramètres du tourbillon sont donnés sur la figure 3.14.	127
3.17	Sources acoustiques pour les tourbillons de Scully et Taylor sans contraction de la veine fluide β , mêmes paramètres que sur la figure 3.16a.	128
3.18	Sources acoustiques pour un déficit de vitesse axiale du tourbillon gaussien avec et sans contraction de la veine fluide β , mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.	129
3.19	Sources acoustiques pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne et avec contraction de la veine fluide β , mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.	130
3.20	Sources acoustiques pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne avec contraction de la veine fluide β et correction d'extrémité de Kutta incluse, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a. . .	131
3.21	Sources acoustiques au niveau du saumon pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne, contraction de la veine fluide β et correction d'extrémité de Kutta incluse, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.	131
3.22	Sources acoustiques pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne avec contraction de la veine fluide β , avec application de la CL d'annulation du potentiel au niveau du saumon, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.	132
3.23	Visualisation des extractions de la MCL et de la MCS pour la configuration FL05/AL05.	134
3.24	Sources acoustiques obtenues à partir du calcul URANS décrit dans l'annexe A à la première harmonique de charge. La trajectoire supposée du tourbillon de bord d'attaque est indiquée par la ligne blanche en pointillé.	134
3.25	Comparaison de la valeur absolue des sources acoustiques à la 1 ^{re} harmonique de charge.	136
3.26	Comparaison des phases pour les sources acoustiques à la première harmonique de charge.	137
4.1	Représentation de la géométrie de la pale aval pour le calcul des intégrales de rayonnement.	140
4.2	Intégrale de rayonnement $Y \mathcal{L}_{LE} k^*/S_0$ pour différents angles de contraction de la veine fluide β et différents angles de flèche Ψ . Le nombre de Mach est $M = 0,44$, le nombre d'onde acoustique adimensionnel est $k^* = 4$ et $k_z'^* = kb_2/4$	146

4.3	Plaque plane utilisée pour l'étude canonique des paramètres β et des modèles de tourbillon.	147
4.4	Directivité acoustique pour $ \hat{p}'_1 $ avec $\Psi = 0^\circ$ ou 28° et $\beta = 0^\circ$; l'observateur est situé à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$ mètre et les échelles sont identiques entre toutes les images. Le point de visualisation est situé à 40 m. du point (0,0,0) en amont de l'impact et est aussi identique pour toutes les images. Les propriétés des événements OBVI sont données sur la figure 3.14.	148
4.5	Directivité acoustique pour $ \hat{p}'_1 $, $\Psi = 28^\circ$ et β variable pour un tourbillon de Lamb-Oseen. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4.	149
4.6	Directivité acoustique pour $ \hat{p}'_1 $ et β variable pour une vitesse axiale gaussienne du tourbillon. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4 et les paramètres pour la vitesse axiale sont indiqués à la figure 3.13.	149
4.7	Visualisations pour un tourbillon complet composé d'un tourbillon de Lamb-Oseen, d'un déficit de vitesse axial gaussien pour $\Psi = 28^\circ$ et $\beta = 11^\circ$. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4. . . .	150
4.8	Directivité acoustique pour $ \hat{p}'_1 $, $\Psi = 28^\circ$ et $\beta = 0^\circ$ et un tourbillon 3D présenté à la figure 4.7a pour différentes conditions aux limites au niveau du saumon. Le point de visualisation est situé à 38 m. de l'origine des axes en amont de l'interaction. L'échelle est identique pour toutes les images. . .	152
4.9	Comparaison de l'amplitude acoustique de l'OBVI pour différentes conditions aux limites à l'extrémité. Coupe pour $z_{c2} = 0$ m en utilisant les paramètres décrits sur la figure 4.8	152
4.10	Chargement instationnaire lié à l'interaction canonique d'une fluctuation de vitesse contrarotative sur les 3 premières pales aval.	154
4.11	Évaluation canonique du comportement des fonctions de Bessel de première espèce $J_\chi(Z)$	156
4.12	Positions des microphones pour la configuration retenue.	157
4.13	Influence du modèle de tourbillon sur le rayonnement acoustique.	158
4.14	Influence de la vitesse axiale sur le rayonnement acoustique.	159
4.15	Influence de la condition aux limites en extrémité de pale sur la directivité du rayonnement acoustique.	160
4.16	Directivités polaires des niveaux acoustiques pour la configuration FL05/AL05 comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats numériques pour différentes fréquences d'interaction.	162
4.17	Directivités polaires des niveaux acoustiques pour la configuration FL05/AL05 comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats numériques pour différentes fréquences d'interaction.	164
5.1	Simplification des vitesses relatives avec les angles de calage des pales. . . .	175
5.2	Bande de rayon avec prise en compte de la flèche.	181
5.3	Résultats de la configuration canonique pour le BRWI [14].	184
5.4	Étude paramétrique de l'angle de flèche pour le modèle BRWI.	185

5.5	Résultats acoustiques pour la configuration FL05/AL05, PSD en bande fine ($\Delta f = 1$ Hz).	187
A.1	Vue suivant $+\mathbf{e}_Z$ de la configuration FL05/AL05.	195
A.2	Domaine utilisé par le solveur aérodynamique et variation du moyeu en fonction de la position axiale.	196
A.3	Maillage utilisé par le solveur aérodynamique.	198
A.4	Coupes à différents rayons (proche moyeu, mi-envergure et proche saumon) affichant la vitesse axiale et l'énergie cinétique turbulente.	199
A.5	Coefficients de pression à différents rayons pour les pales des rotors amont et aval. Les coupes sont moyennées pour un passage de pale en utilisant 75 instantanés par passage de pale.	200
A.6	Extraction temporelle de la pression surfacique sur la pale amont proche du bord d'attaque.	201
A.7	Critère $Q = 200000 \text{ s}^{-1}$ sur un instantané synchrone (continuité des résultats entre le bloc amont et aval) pour une itération. Les pales amont sont en bleu alors que les pales aval sont en rouge.	201
A.8	Extraction des coefficients de Fourier de la pression surfacique sur les pales pour 17 passage de pales contrarotatifs.	202
B.1	Repères utilisés pour caractériser un dipôle tournant.	204
B.2	Résultats de la configuration canonique.	212
C.1	Matrices de rotations pour l'obtention de l' <i>upwash</i> liée au tourbillon	213
D.1	Tracé des fonctions $(1+i)E^*(z)+1$ et $(1+i)E^*(z)-1$.	232
E.1	Partie réelle de la pression acoustique produite par un monopôle. $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$.	243
E.2	Partie réelle de la pression acoustique produite par un dipôle. $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$.	243
E.3	Partie réelle de la pression acoustique produite par un quadripôle. $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$.	244
E.4	Puissance acoustique et intensité acoustique en champ lointain pour les différentes solutions canoniques, $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\rho_0 = 1,14 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\omega = 4000\pi \text{ rad.s}^{-1}$ et $P_{ref} = 10^{-12} \text{ Watt}$.	245

LISTE DES TABLEAUX

1	Intervalles joués pour des doublets d'hélices contrarotatives à la pulsation de rotation $\Omega = 88\pi \text{ rad.s}^{-1}$ pour les deux rotors.	iv
1.1	Référentiels utilisés pour passer du repère associé au tourbillon \mathfrak{R}_v ou aux sillages \mathfrak{R}_w au repère lié à la pale aval $\mathfrak{R}_{p'}$. L'ordre des vecteurs directeurs est modifié par permutation directe pour mettre en valeur l'axe de rotation associé au changement de repère. Le centre de rotation utilisé est \mathbf{X}_{VI} pour le tourbillon et \mathbf{X}_{R2} pour le sillage.	37
4.1	Étude paramétrique de r_0 , u_θ^{max} et u_z^{max} sur le bruit émis. Les résultats présentés donnent l'écart sonore maximal (en dB) sur l'arc de microphone présenté à la figure 4.12 par rapport aux résultats du modèle OBVI de la figure 4.15 sans CL au niveau du saumon	157
4.2	Importance relative du mécanisme responsable des niveaux de pression acoustique pour différentes positions observateurs. Le bruit émis est classé en trois catégories suivant la source acoustique majoritaire pour les résultats acoustiques : V. D. indique que le tourbillon est le mécanisme dominant, W. D. indique que le sillage domine et Mix. indique que les deux mécanismes ont des valeurs acoustiques similaires sur l'arc considéré.	163
5.1	Paramètres pour la configuration canonique pour le modèle BRWI.	183
A.1	Point de fonctionnement à l'étude dans ce manuscrit.	195
A.2	Conditions aux limites du calcul.	197
B.1	Paramètres pour la configuration canonique.	212

LISTE DES SYMBOLES

SYMBOLES	DÉFINITION	REPÈRES
$\mathfrak{R}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$	Repère global attaché à la machine en coordonnées cartésiennes	
$\mathfrak{R}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi)$	Repère global attaché à la machine en coordonnées cylindriques	
$\mathfrak{R}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\Phi)$	Repère global attaché à la machine en coordonnées sphériques	
$\mathfrak{R}_v = (\mathbf{X}_v, \mathbf{t}_v, \mathbf{b}_v, \mathbf{n}_v)$	Base de Frenet attaché à la trajectoire du tourbillon (cartésien)	
$\mathfrak{R}_v = (\mathbf{X}_v, \mathbf{t}_v, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$	Base de Frenet attaché à la trajectoire du tourbillon (cylindrique)	
$\mathfrak{R}_{R1} = (\mathbf{X}_{VI}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T)$	Repère déroulé au niveau de l'événement OBVI (cartésien)	
$\mathfrak{R}_w = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{xc1}, \mathbf{e}_{yc1}, \mathbf{e}_{zc1})$	Repère déroulé attaché aux pales amont (cartésien)	
$\mathfrak{R}_p = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})$	Repère déroulé attaché aux pales aval sans flèche (cartésien)	
$\mathfrak{R}_{p'} = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{x'c2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{z'c2})$	Repère déroulé attaché aux pales aval avec flèche (cartésien)	
SYMBOLES LATINS		
a_φ, Φ_{ini}	Coefficients de la régression de la trajectoire du tourbillon dans la direction \mathbf{e}_Φ	
a_R, R_{ini}	Coefficients de la régression de la trajectoire du tourbillon dans la direction \mathbf{e}_R cylindrique	
$B_1(B_2)$	Nombres de pales du rotor amont (aval)	
$b_1(b_2)$	Demi-corde de la pale amont (aval)	
C_{amp}	Amplitude de la densité spectrale des fluctuations de vitesses	
$C_{chord}(C_{span})$	Amplitude de la projection reliée à \mathbf{e}_{xc2} (\mathbf{e}_{zc2})	
C_p	Coefficient de pression agissant sur la pale	
c_β	Coefficient de contraction de r_0 dû à β	
$c_1(c_2)$	Longueur de corde des pales du rotor amont (aval)	
\mathcal{D}	Phase acoustique liée à la propagation dans la direction de la corde \mathbf{e}_{xc2}	
$D_c = 1 + M_x \cos \Theta_e$	Coefficient Doppler	
$D_{m,n}$	Fonction de directivité du modèle BRWI	
E	Énergie turbulente de l'écoulement	
$\mathbb{E}(\cdot)$	Espérance d'un phénomène stochastique	
$F(y, \tau)$	Efforts de la pale sur le fluide	

$f_*(.)$	Fonction de séparation sillage-tourbillon
$f_{1,*}(.)$	Fonction de modulation des sillages turbulents
\tilde{G}^*	Densité spectrale des <i>upwash</i> incidentes liées à u_θ du vortex
\tilde{G}^{Ga}	Densité spectrale des <i>upwash</i> incidentes liées à u_z du vortex
\tilde{G}^{tot}	Densité spectrale des <i>upwash</i> totales
g	Fonction distance source-observateur
$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{u}$	Tenseur gradient de vitesse
$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$	Vecteur nombre d'onde
k	Énergie cinétique turbulente
k	Nombre d'onde acoustique
L_w	Demi-largeur du sillage
\mathcal{L}	Fonction de transfert acoustique utilisant la solution d'Amiet-Schwarzschild
$l_{tot} = l_{LE} + l_{TE}$	Saut de pression instationnaire utilisant les deux solutions d'A-S
M	Nombre de Mach
(m, n)	Couple d'indices associé au rotor amont m et aval n
P	Puissance acoustique
p'	Pression instationnaire agissant sur la surface de la pale
p_0	Pression atmosphérique standard (101325 Pa.)
Q	Critère $Q = 0.5(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})$
S_{pp}	Autocorrélation de la pression acoustique
$R1(R2)$	Rotor amont (aval)
R_{VI}	Rayon d'interaction du tourbillon
R_{ww}	Autocorrélation des <i>upwash</i> impactant le bord d'attaque
R'	Distance source-observateur
r_0	Rayon visqueux du tourbillon
$\bar{r} = r/r_0$	Rayon adimensionnel du tourbillon
\mathbf{S} et $\mathbf{\Omega}$	Partie symétrique et antisymétrique du tenseur gradient de vitesse
S_0	Distance Source-Observateur corrigé par la convection
T_{ij}	Tenseur de Lighthill
\mathbf{U}	Vecteur vitesse
U_X	Vitesse axiale du CROR dans la direction \mathbf{e}_X
U_c	Vitesse de phase incidente du tourbillon dans la direction \mathbf{e}_{xc2}
$\mathbf{u} = (u_z, u_r, u_\theta)$	Vecteur vitesse du tourbillon
$u_{\theta(z)}^{max}$	Maximum de vitesse azimuthal (axial) du tourbillon
w	Fluctuation de vitesses incidentes, <i>upwash</i>
\bar{w}'	Intensité de la turbulence

\mathbf{X}_v	Trajectoire du tourbillon dans le repère \mathfrak{R}_0
	SYMBOLES GRECS
α	Coefficient pour le maximum de Lamb-Oseen
β	Angle de contraction de la veine fluide
β_*	Coefficient de compressibilité, facteur de Prandtl-Glauert
Γ	Circulation totale du tourbillon
$\gamma_1(\gamma_2)$	Angle de calage, conv. plan de rotation du rotor amont (aval)
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$\eta = r^2/4\tau, \tau = \nu t$	Variables utilisées pour la solution de Laguerre
Θ	Angle polaire de la géométrie CROR \mathbf{e}_Θ
Θ^*	Paramètre de Graham
κ	Paramètre d'Helmholtz
Λ	Échelle intégrale de la turbulence
$\nu(\nu_t)$	Viscosité cinématique laminaire (turbulente)
$\rho, [\rho'], (\rho_0)$	Masse volumique du fluide totale [fluctuations] (au repos)
τ	Temps associé aux sources acoustiques
Φ	Angle de flèche du profil
$\Phi_w w$	Autocorrélation des vitesses turbulentes incidentes
φ	Angle d'hélicité du tourbillon
Φ'	Potentiel d'écoulement
$\chi_{m,n}$	Mode acoustique pour le bruit tonal des CROR
$\chi_1(\chi_2)$	Angle de calage, conv. axe de rotation du rotor amont (aval)
Ψ	Angle de flèche de la pale aval
$\boldsymbol{\omega}$	Vecteur vorticité
ω	Pulsation du phénomène
ω	Taux de dissipation spécifique du modèle RANS
	FONCTIONS UTILISÉES
$\delta(.)$	Distribution de Dirac
$E(.) = C(.) + iS(.)$	Fonction de Fresnel
$E_n(.)$	Exponentielle intégrale d'ordre n
$\text{erf}(.), (\Phi^0(.))$	Fonction erreur réelle (complexe)
$F_c(.)$	Fonction de correction pour le calcul de la puissance acoustique avec convection axiale
$G(x, t y, \tau)$	Fonction de Green du problème
$K_n(.)$	Fonctions de Bessel modifiées de second espèce d'ordre n
$J_n(.)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
$L_n(.)$	Fonctions de Laguerre
	EXPOSANTS ET INDICES
$(.)^{LO}$	Exposant relié au tourbillon de Lamb-Oseen
$(.)^{Sc}$	Exposant relié au tourbillon de Scully

$(.)^{Ta}$	Exposant relié au tourbillon de Taylor
$(.)_{LE}$	Indice relié à la première itération de la solution de bord d'attaque du modèle d'Amiet-Schwarzschild
$(.)_{TE}$	Indice relié à la seconde itération de la solution de bord d'attaque du modèle d'Amiet-Schwarzschild
$(.)_t$	Indice relié à la correction du saumon en utilisant la méthode d'Amiet-Schwarzschild
$(.)_{ST}$	Indice relié à la bande de rayons utilisée
$(.)'$	Indice indiquant que la variable est prise dans le repère de la pale avec angle de flèche Ψ
$(.)^*$	Variable adimensionnelle
$(\tilde{\cdot})$	Transformée de Fourier de la quantité physique
$(\hat{\cdot})$	Coefficient de la série de Fourier de la quantité physique

LISTE DES ACRONYMES

ACRONYMES	DÉFINITION
ACARE	Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe
A-S	Méthode d'Amiet-Schwarzschild
ASDM	Siddeley Double Mamba
BPF	Fréquence de passage de pales (Blade Passing Frequency)
BRTE	Broadband Rotor Trailing Edge
BRWI	Broadband Rotor-Wake Interaction
CL	Conditions aux Limites
CFD	Computational Fluid Dynamics
CO ₂	Dioxyde de carbone (Carbon dioxyde)
CROR	Counter-Rotating Open Rotor
CRP	Counter-Rotating Propeller
CRTF	Counter-Rotating TurboFans
DNS	Direct Navier-Stokes
FAA	Federal Aviation Administration
FWH	Ffowcs-Williams et Hawkings
LBM	Lattice-Boltzmann Methods
LEE	Linearized Euler Equations
LES	Large-Eddy Simulation
LSWT	Low-Speed Wind Tunnel
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NLH	Non-Linear Harmonic
OACI	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
OBVI	Orthogonal Blade-Vortex Interaction
UDF	UnDucted Fan
(U)RANS	(Unsteady) Reynolds Averaged Navier-Stokes
UHBR	Ultra-High By-pass Ratio
V. D.	Vortex Dominated
V/STOL	Vertical/Short Take Off and Landing
SAGE	Sustainable And Green Engine
TSaGI	TSentralniy AeroGidrodinamicheskiiy Institut
W. D.	Wake Dominated
WBI	Wake-Blade Interaction

INTRODUCTION

Le doublet d'hélices contrarotatif (DHCR)

La technologie du *Counter-Rotating Open Rotor* ou CROR est une alternative de propulsion aéronautique au turboréacteur à fort taux de dilution. Suivant Dron [39], un CROR pourrait réduire les émissions de CO_2 et la consommation de carburant de manière significative. La figure 1 présente une configuration CROR moderne. Ce moteur d'avion se compose d'un Doublet d'Hélices ContraRotatives (DHCR) non caréné combiné à une turbine à gaz. Les hélices du DHCR tournent dans des directions opposées et sont positionnées l'une à la suite de l'autre. La distance entre les hélices est faible en comparaison de leur rayon maximum. L'épaisseur des pales est faible ; les vitesses de rotation ainsi que l'envergure du moteur sont élevées (≈ 1000 tr/min et ≈ 4 m d'envergure).



Figure 1 Géométrie CROR ©Safran Aircraft Engine¹.

¹<http://www.cleansky.eu/sustainable-and-green-engines-sage>

Concepts préliminaires

Les premiers exemples d'hélices contrarotatives proviennent d'expériences réalisées peu après la fin de la Seconde Guerre mondiale. Les États-Unis ont testé des DHCR sur le Vought F4U-1A Corsair avec deux hélices Hamilton. La Grande-Bretagne, de son côté, a testé des DHCR sur l'avion anti-sous-marin Fairey Gannet avec le moteur Siddeley Double Mamba engine (ASDM) et sur l'avion de reconnaissance Supermarine Spitfire XIX avec une version modifiée du Rolls-Royce Griffon 58. Le but était d'augmenter le rayon d'action et de pouvoir décoller et atterrir sur des distances très courtes (*Vertical or Short-Take Off and Landing* ou V/STOL). Malgré de bonnes performances en vol, l'essor des turboréacteurs, les problèmes de transmission et de vibration ont empêché les DHCR de se développer. En revanche, l'Union Soviétique a développé en 1958 et fait voler jusqu'en 1993 le Tupolev 114. Cet avion de fret était propulsé par 4 moteurs Kuznetsov NK-12 contrarotatifs développant 9,000 kW chacun. Le moteur NK-12 fut utilisé par d'autres avions russes, notamment le TU-95 et l'Antonov 90, et reste à ce jour le plus puissant turbopropulseur jamais créé. À titre d'exemple, le turbopropulseur triple corps Europrop TP400, utilisé sur l'Airbus A400M, développe une puissance de 8,200 kW. Tous ces concepts préliminaires sont présentés sur la figure 2.

Tous les concepts présentés étaient des CROR *rudimentaires*. Le dessin des pales provient de celui des hélices classiques. Le nombre de pales était faible (entre 3 et 5) et les pales étaient de grand allongement. De plus, la rotation du DHCR était assurée par des moteurs à piston sur une majorité des moteurs. Le concept de CROR est lié à un autre type de moteur : le propfan. L'idée principale d'un propfan est d'avoir un turbopropulseur conçu pour atteindre un rendement propulsif plus élevé à haute vitesse [16]. Le terme propfan a été utilisé à la place de turbopropulseur par GE pour que le public soit moins réticent à l'idée de voler avec un avion à hélice. Rohrbach et Metzger [129] imaginaient que des efficacités propulsives supérieures aux turboréacteurs pouvait être obtenues grâce à des pales fines, légèrement cambrées, possédant un angle de flèche et un dévers² importants. Les travaux liés au propfan furent très importants après les deux premières crises pétrolières (1973 et 1979) [50].

²Dans ce travail, flèche et dévers sont pris dans les conventions des turbomachines axiales hautes vitesses. La flèche est relative au retrait axial dans la direction de l'envergure alors que le dévers indique le déplacement dans le plan de rotation.



(a) Vought F4U Corsair



(b) Fairey Gannet



(c) Spitfire PR XIX



(d) Tupolev 114

Figure 2 Concepts préliminaires d'hélices contrarotatives (DHCR).

La décennie dorée des CROR

En 1983 General Electric (GE) révéla son concept d'*UnDucted Fan* (UDF) illustré sur la figure 3a. La réponse directe, portée par Pratt & Whitney, Hamilton Standard et Allison, donna naissance au 578-DX présenté sur la figure 3b. UDF et 578-DX avaient une partie froide similaire, composée d'un doublet d'hélices contrarotatives. Les pales étaient fines, peu cambrés et en fibres de carbone. La partie chaude était différente pour les deux projets. La turbine du 578-DX était composée d'une boîte d'engrenage afin d'adapter la vitesse de rotation entre le doublet d'hélice contrarotatif et la turbine basse-pression. L'UDF utilisait un concept différent basé sur une turbine contrarotative sans stator. L'UDF pouvait ainsi se passer de la boîte d'engrenage.

Ces concepts ont rapidement donné naissance à différents essais au sol comme en vol. En août 1985, le GE36 effectue une série d'expériences au sol³ : fonctionnement sur de longues périodes à pleine puissance, impacts d'oiseaux et tests par vents de travers. En 1986, le Boeing 727-100 vola avec un GE36 sur une période de 5 mois. Ces vols furent complétés

³<https://www.museesafran.com/en/video/92>

par 168 heures de tests en vols sur le démonstrateur MD-UHB (un McDonnell Douglas MD-81 modifié) entre mai 1987 et mars 1988. De son côté, le 578-DX fut testé sur un MD-81 en avril 1989.

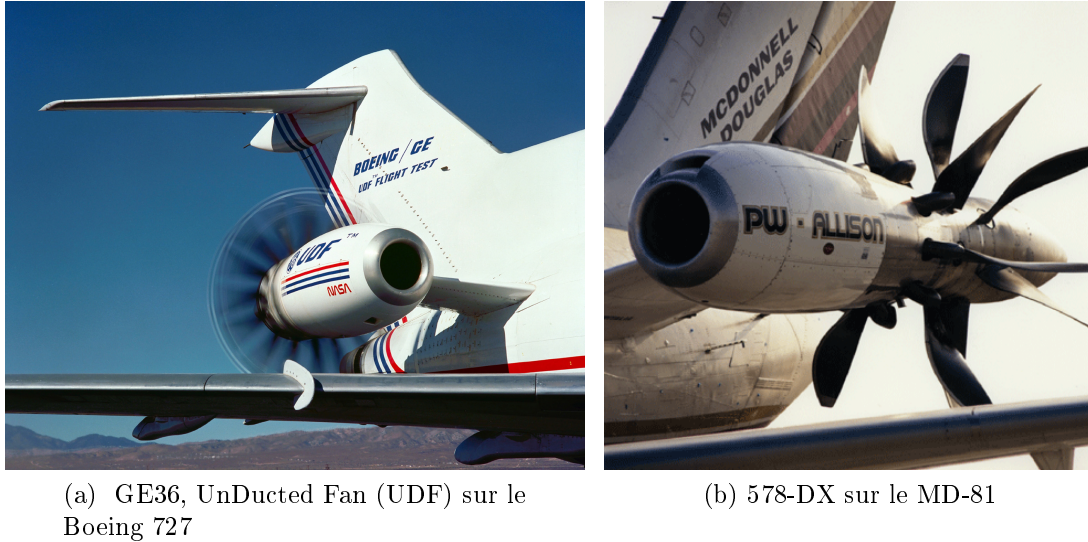


Figure 3 Concepts de CROR des années 80.

Ces démonstrateurs construits par l'industrie étaient étroitement liés aux développements scientifiques orchestrés par le *Lewis research center* de la NASA. Les premiers résultats expérimentaux sur un DHCR de CROR proviennent du travail de Strack *et al.* [146]. Des résultats prometteurs furent obtenus en dépit de problèmes inhérents à la transmission contrarotative. Une augmentation de l'efficacité propulsive de 9 % par rapport à des hélices simples fut prédite même en prenant en compte une pénalité de 5 % d'efficacité propulsive liée à des traitements acoustiques plus importants sur le fuselage de l'avion afin de réduire le bruit cabine. En effet, le coût de l'augmentation de l'efficacité propulsive fut l'augmentation du bruit émis. Dittmar [35] conclut que les niveaux acoustiques des DHCR des années 80 pourraient être gênant pour les riverains des aéroports. À partir de ces conclusions, la NASA donna des recommandations pour réduire les émissions acoustiques des DHCR :

- Augmenter l'angle de flèche des pales au niveau de l'extrémité (saumon de pale) pour réduire l'intensité des chocs soniques.
- Augmenter l'angle de dévers pour jouer sur les déphasages radiaux lors de l'impact des sillages provenant des pales du rotor amont sur le bord d'attaque des pales du rotor aval.
- Réduire l'envergure des pales du rotor aval pour éliminer l'interaction entre les tourbillons d'extrémité des pales du rotor amont et le saumon des pales du rotor aval.

- Augmenter la distance entre les rotors pour laisser la viscosité atténuer les fluctuations de vitesse comme les sillages.
- Utiliser un nombre différent de pales entre le rotor amont et le rotor aval pour réduire l'inconfort lié au bruit tonal (impression de sifflement).
- Réduire la traînée des pales pour réduire l'intensité des sillages et des tourbillons issus des pales amont.

Dans les années 80, la NASA a concentré ses efforts sur la réduction du bruit pour les DHCR. La géométrie F7/A3 a été testée en soufflerie anéchoïque par Woodward [166] et Gordon et Woodward [60] pour des points de fonctionnement de type décollage ou approche. La figure 4 présente le spectre acoustique des résultats de Gordon et Woodward [60] sur la F7/A3. Contrairement aux turboréacteurs où la nacelle traitée acoustiquement diminue le bruit émis à certaines fréquences [30], le bruit des DHCR se propage directement en champ libre et présente deux caractéristiques principales.

Tout d'abord, les spectres acoustiques de la figure 4 montrent un niveau acoustique de fond. Ce niveau est présent pour toutes les fréquences. Ce rayonnement acoustique est donc appelé bruit à large bande et provient de la turbulence de l'écoulement.

Par ailleurs, on peut observer des pics d'amplitude élevée à certaines fréquences fixes. Ces pics sont le résultat de deux facteurs : la rotation des pales et les fluctuations de vitesses déterministes impactant les hélices. Dans la littérature, ces pics sont appelés bruit tonal.

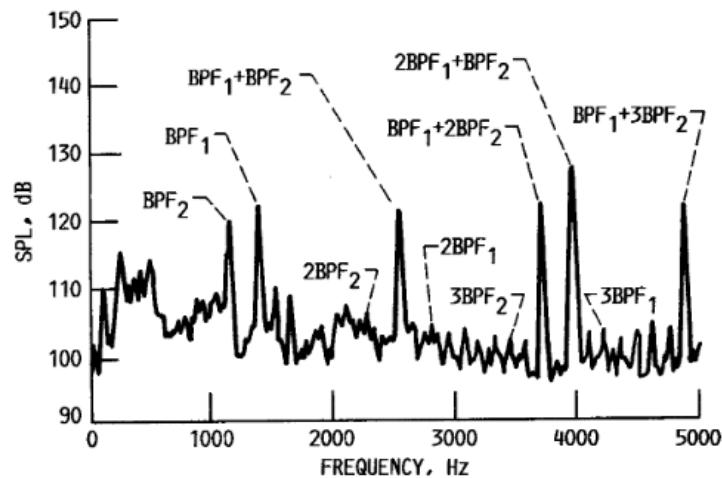


Figure 4 Pression acoustique (Sound Pressure Level ou SPL) en déciBel (dB) pour le DHCR F7/A3 mesurée pour un microphone en aval de la configuration obtenue par Gordon et Woodward [60]. La configuration est au décollage (nombre de Mach Axial 0,2 et nombre de Mach de rotation en tête de pale 0,63).

Pour une hélice, augmenter le nombre de pales pour une poussée constante permet de réduire les niveaux sonores. Durant la même série d'expériences, la sensibilité sonore à l'espacement inter-rotor a été examinée. Grâce à la réduction de l'envergure du rotor aval, Dittmar et Stang [38] et Dittmar [36, 37] ont obtenu une réduction acoustique significative. Avec cette méthode, la réduction peut atteindre 15 dB pour certaines fréquences. La stratégie d'augmentation de la distance inter-rotor n'a pas donné de résultats satisfaisants. Le but était d'augmenter la distance inter-rotor afin que les sillages aient le temps de se diffuser. Cependant, par cette méthode, l'interaction entre le tourbillon marginal et le saumon des pales aval était augmentée.

Les configurations CROR modernes

L'intérêt pour les configurations CROR a grandement diminué après les années 80. En effet, le prix du kérosène est retombé alors que des difficultés technologiques restaient à résoudre. Les risques encourus lors d'un bris de pale ainsi que le bruit émis ont notamment été des points durs lors du développement des CROR. La recherche s'est alors principalement concentrée sur les turboréacteurs à double flux. Ceux-ci ont augmenté en diamètre dans le but d'augmenter le taux de dilution. Ce taux est en effet directement lié à l'efficacité propulsive tout en réduisant le bruit (notamment le bruit de jet). Pour les CROR, les taux de dilution sont supérieurs aux turboréacteurs modernes cependant ce n'est qu'avec la hausse des prix du pétrole dans les années 2000 que le concept est redevenu attractif.

Les efforts principaux sur les CROR sont encadrés par l'initiative CleanSky⁴. L'un des objectifs était de créer les démonstrateurs SAGE 1 et 2 (*Sustainable And Green Engine*). L'ACARE (*Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe*), de son côté, a indiqué les périodes de mise sur le marché potentielles des différentes technologies de propulsion aéronautique :

- 2025 : turboréacteurs améliorés (*Ultra-High By-pass Ratio* ou UHBR)
- 2030+ : CROR

Les attentes concernant les CROR sont grandes, 30 % d'économie de carburant par rapport au CFM56 sont en effet espérés par les motoristes. Au sein du programme CleanSky, Safran a montré par des essais en soufflerie qu'un doublet d'hélices contrarotatifs pouvaient respecter les contraintes acoustiques (Chapitre 14) proposés par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI) [48]. Pour respecter ces normes acoustiques, les ingénieurs jouent principalement sur le design des pales ainsi que les conditions de fonctionnements.

⁴<http://www.cleansky.eu/sustainable-and-green-engines-sage>

Cependant, une problématique émerge puisqu'à ce jour les essais sont l'outil majeur pour la prévision acoustique. Ces expériences sont coûteuses en temps et en ressources donc il faut s'assurer que la nouvelle géométrie soit assez prometteuse pour lancer des essais. On utilise alors des outils numériques tels que la CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Ces outils permettent, entre autres, de faire le lien entre les paramètres géométriques des pales d'un DHCR et le bruit émis. Durant la phase de conception du moteur, l'optimisation aéroacoustique des géométries DHCR est donc envisagée pour respecter les contraintes acoustiques.

Problématique et organisation du manuscrit

En phase de conception, avant d'évaluer les performances d'un design à l'aide d'une maquette, les simulations numériques pour les écoulements fluides (CFD) sont utilisés. Ces méthodes sont relativement précises et rapides pour l'évaluation des performances aérodynamiques et acoustiques d'une géométrie. Cependant, ces méthodes sont encore trop lentes et coûteuses dans les étapes d'avant-projet où un grand nombre de géométries et de points de fonctionnement doivent être testés. Pour ces étapes de conception, des outils analytiques ou semi-analytiques doivent être utilisés afin de valider rapidement et précisément la viabilité d'une géométrie.

La problématique principale de ce manuscrit est d'établir une évaluation réaliste et rapide du bruit tonal et à large bande émis pour le doublet d'hélices d'un CROR en configuration isolée. À la lumière des résultats de Dittmar [37] où sillages et tourbillons sont les principaux contributeurs du bruit émis, une problématique secondaire consistera à la décomposition de la production sonore lorsque plusieurs sources acoustiques sont en présence. Pour finir, le compromis précision/rapidité des outils semi-analytiques disponibles sera testé.

La structure du mémoire est la suivante : le premier chapitre dresse une revue de littérature de la prévision sonore des DHCR. Les mécanismes responsables des émissions sonores d'un DHCR isolé (sans pylône, nacelle ou fuselage) sont aussi mis en avant dans le but d'établir la stratégie de prévision sonore la plus adaptée. Cette revue permet aussi d'identifier les points à améliorer pour la méthodologie adoptée. Le deuxième chapitre met l'accent sur la modélisation des fluctuations de vitesse. Une attention particulière est portée sur les mécanismes générateurs de bruit principaux. À partir des résultats de ce chapitre, les sources acoustiques sont évaluées dans le troisième chapitre et la prévision acoustique est effectuée dans les chapitres quatre et cinq, respectivement relatifs aux

bruits tonal et à large bande. Pour chaque chapitre, les résultats provenant de la modélisation sont évalués pour une géométrie récente DHCR développée par Safran Aircraft Engines : la FL05/AL05. Cette géométrie est présentée dans l'annexe A. La FL05/AL05 présente l'avantage d'avoir d'une part, des résultats aérodynamiques issus de la CFD et d'autre part, des résultats acoustiques de campagnes d'essais et de modèles numériques. De cette manière, résultats expérimentaux, numériques et analytiques sont comparés à chaque étape du développement.

CHAPITRE 1

MÉTHODE DE PRÉVISION DU BRUIT DES DHCR

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'identifier les méthodes de prévision acoustique pour les DHCR présents dans la littérature. Pour ce faire, les mécanismes à l'origine du bruit tonal et du bruit à large bande seront identifiés dans un premier temps. Dans un second temps, les outils et résultats pour la prévision acoustique seront présentés. Pour finir, une méthodologie sera adoptée grâce aux résultats de la littérature. Celle-ci permettra d'introduire les éléments nécessaires à la résolution de la problématique.

1.1.1 Bruit tonal

Les fréquences d'émission du bruit tonal présenté sur la figure 4 sont obtenues en considérant un rotor ayant B pales identiques et réparties régulièrement autour de l'axe de rotation. Si ce même rotor est en rotation à la pulsation angulaire Ω alors un observateur constatera que l'écart temporel τ_{BPF} entre chaque *passage de pale* est constant. La fréquence de passage des pales (BPF) est l'inverse de cet écart temporel :

$$\text{BPF} = \frac{\Omega B}{2\pi} = \frac{1}{\tau_{\text{BPF}}}. \quad (1.1)$$

Cette fréquence particulière est la fréquence fondamentale du rotor. Cependant, cette fréquence n'est pas unique. En effet, un rotor produit aussi toutes les fréquences multiples de la BPF, appelées harmoniques d'ordres supérieures. Elles se notent :

$$\text{BPF}_n = \frac{n\Omega B}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

où n correspond à l'ordre de l'harmonique considérée.

Si l'on considère une géométrie DHCR, la périodicité est différente d'un rotor simple. En effet, on peut dans un premier temps considérer la périodicité de chacun des rotors

séparément. De cette manière, on obtient les fréquences fondamentales du rotor amont ($R1$) et du rotor aval ($R2$). Elles constituent les tons *propres* à chacun des rotors.

Dans un deuxième temps, puisque le bruit peut provenir des fluctuations de vitesse impactant les rotors, il existe aussi des tons provenant de *l'interaction* entre les deux rotors. Si le rotor amont ($R1$) a B_1 pales qui tournent à la vitesse de rotation Ω_1 et si le rotor aval ($R2$) a B_2 pales qui tournent à Ω_2 alors la périodicité fondamentale de l'interaction entre les deux rotors est :

$$\text{BPF}_{1,1} = \frac{\Omega_1 B_1}{2\pi} + \frac{\Omega_2 B_2}{2\pi} = \text{BPF}_{R1} + \text{BPF}_{R2}. \quad (1.3)$$

$\text{BPF}_{R1(R2)}$ indique la fréquence fondamentale du rotor amont (aval). Le signe plus provient du caractère contrarotatif du doublet d'hélices. $\text{BPF}_{1,1}$ est la fréquence fondamentale d'interaction pour un DHCR. Les fluctuations de vitesse sont aussi produites aux fréquences d'ordres supérieures par conséquent les fréquences d'émission sonore d'un DHCR sont :

$$\text{BPF}_{m,n} = m\text{BPF}_{R1} + n\text{BPF}_{R2} = (m, n), (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.4)$$

Le bruit tonal émis par les DHCR est donc produit aux fréquences qui sont combinaisons linéaires des BPF de chacun des rotors. Si un des indices m ou n est nul le bruit tonal propre à chaque rotor est calculé. En revanche, si m et n sont non nuls, le bruit tonal d'interaction est calculé. Les fluctuations de vitesse créées par un des deux rotors produisent un chargement instationnaire sur le rotor adjacent. Si l'on considère le bruit émis par le rotor aval, l'indice m est appelé harmonique de charge puisqu'il fait référence au chargement instationnaire induit par le rotor amont sur le rotor aval.

La figure 1.1 montre l'importance du bruit tonal d'interaction comparé au bruit propre. À cause de la faible distance entre les deux rotors, le bruit tonal d'interaction est dominant pour les conditions d'approche et de décollage. Stuermer et Yin [148] ont montré que le bruit tonal d'interaction est 5 à 35 dB plus haut que le bruit tonal propre à chacun des rotors. Cette différence est particulièrement visible pour des angles d'émission éloignés du plan de rotation. Le bruit tonal d'interaction est produit à des fréquences différentes du bruit tonal propre aux rotors si le nombre de pales sur le rotor amont est différent du nombre de pales sur le rotor aval. Stuermer et Yin [148] utilisent donc une configuration 10x8 (10 pales pour $R1$ et 8 pales pour $R2$). Les résultats présentés sur la figure 1.1 sont obtenus en sommant le bruit tonal propre à chaque rotor jusqu'à la 3^{ème} harmonique. De la même manière, les résultats liés aux fréquences d'interaction sont calculés pour $m \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

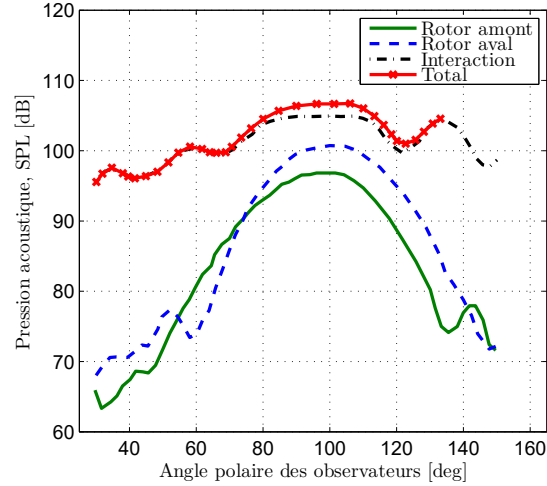


Figure 1.1 Pression acoustique intégrée pour toutes les fréquences tonales pour un arc de microphones situé à 10 diamètres du DHCR. 0° pointe à l'amont de la configuration. Le DHCR est 10x8 (10 pales pour $R1$ et 8 pales pour $R2$) en condition de décolage à nombre de Mach 0,2. Cette image est reproduite à partir des résultats de Stuermer et Yin [148].

Dittmar [35] a identifié les fluctuations de vitesse déterministes responsables du bruit tonal d'interaction. La figure 1.2 illustre les mécanismes correspondants. Pour une configuration isolée, l'interaction entre les rotors provient :

- des sillages visqueux provenant du rotor amont,
- des tourbillons marginaux, créés en tête des pales du rotor amont,
- des tourbillons de pied, créés au pied des pales du rotor amont,
- de l'effet potentiel au bord d'attaque des pales du rotor aval.

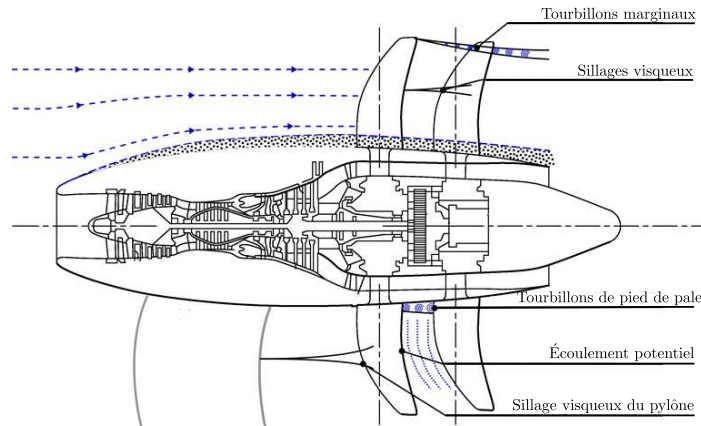


Figure 1.2 Décomposition des fluctuations de vitesses déterministes pour un DHCR.

Les trois premières sources sont créées par le rotor amont et impactent donc les pales du rotor aval. En revanche, la dernière source impacte au niveau du bord de fuite des pales du rotor amont.

Si la configuration est installée, d'autres fluctuations de vitesse génèrent du bruit [72]. Une des fluctuations des vitesses peut alors provenir du sillage visqueux d'un pylône placé en amont du DHCR (configuration *pusher* comme sur la figure 3a).

Pour une configuration isolée, Peters et Spakovszky [117] ont calculé le poids relatif des différents mécanismes liés au bruit d'interaction au décollage (nombre de Mach 0,25, 934 tr/min). Pour ce faire, ils ont considéré un DHCR où les nombres de pales du rotor amont et aval ne sont pas multiples entre eux. Ils ont aussi découpé la surface des pales en différentes zones. Chacune de ces zones contribue indépendamment pour un mécanisme particulier. Le chargement instationnaire de $R2$ compris entre 0 et 12,5 % de l'envergure correspondrait à l'influence du tourbillon de pied issu du rotor amont. De 12,5 à 75 %, le chargement proviendrait des sillages issus du rotor amont alors que de 75 à 100 % seul le tourbillon provenant de la tête du rotor amont contribuerait au chargement instationnaire. Cette méthode de découpe est préliminaire puisque sillages et tourbillons peuvent être visibles à des rayons identiques. De plus, Falissard et Delattre [44] ont pu montrer que l'influence de la vitesse azimutale du tourbillon s'étend au delà de la limite arbitraire des 75 % de l'envergure. Cependant Peters et Spakovszky [117] concluent que pour la première fréquence d'interaction 84 % du bruit émis à l'amont de la configuration provient de l'impact des sillages si la pale aval est réduite de 15 % en envergure. De cette manière, le tourbillon de tête n'impacte plus l'extrémité de la pale aval.

Réduire l'envergure de la pale aval est l'une des recommandations principales proposées par Dittmar [35]. Cette technique, appelée *clipping*, permet de réduire le bruit lié à l'impact orthogonal du tourbillon sur la pale (*Orthogonal Blade-Vortex Interaction* ou OBVI). Le caractère orthogonal de l'interaction provient de l'angle formé quand la trajectoire du centre du tourbillon croise la trajectoire de la pale [27].

Le *clipping* permet effectivement de réduire le bruit émis lorsque le DHCR fonctionne dans des régimes de croisière. Cependant, en phase d'approche ou de décollage l'écoulement moyen est modifié par l'incidence du moteur. L'interaction entre le tourbillon et la pale aval peut donc être réactivée même après application du *clipping* [17, 29, 142]. Si le *clipping* est suffisant, on évite également l'impact des tourbillons en basses vitesses.

Si l'interaction pale-tourbillon est réactivée, la contribution de l'OBVI s'élève à 67 % en amont pour la fréquence (1,2). Pour la fréquence (1,3), 59 % et 97 % du bruit provient de

l'OBVI respectivement en amont et en aval du DHCR proposé par Peters et Spakovszky [117].

L'effort important pour réduire le bruit tonal d'interaction porte peu à peu ses fruits. En effet, les DHCR modernes sont optimisés pour réduire l'acoustique tonale. Des expériences récentes montrent qu'une conception appropriée des pales en plus du *clipping* de la pale aval permet de réduire la puissance acoustique émise à la première fréquence d'interaction de 5 dB [48]. Cependant, la réduction accrue du bruit tonal fait émerger le bruit à large bande.

1.1.2 Bruit à large bande

Parry *et al.* [115] ont montré que, particulièrement à hautes fréquences, la simple analyse tonale d'un DHCR moderne ne pouvait pas fournir une prévision acoustique satisfaisante. Grâce aux résultats acoustiques d'un banc d'essai DHCR, Parry *et al.* [115] ont trouvé un écart maximum de 8 dB entre la puissance acoustique totale intégrée en tiers d'octave et cette même puissance acoustique calculée seulement à partir du bruit tonal.

Les fluctuations de vitesse turbulente pour un DHCR isolé sont illustrées sur la figure 1.3. Le bruit à large bande provient donc [13] :

- de l'impact de la turbulence incidente au bord d'attaque des pales,
- des couches limites turbulentes présentes sur les pales et convertis en ondes sonores par le bord de fuite,
- de l'impact des sillages turbulents,
- de l'impact de la turbulence contenue dans le tourbillon marginal.
- de la déformation des tourbillons issus des rotors amont et aval qui interagissent entre eux en aval du DHCR.

Les deux premières fluctuations de vitesse agissent sur les deux rotors indépendamment alors que les deux dernières fluctuations impactent les pales du rotor aval.

Blandeau [13] a proposé une méthodologie semi-analytique pour la prévision du bruit à large bande des DHCR. Il modélise le bruit d'interaction des sillages turbulents sur le rotor aval (BRWI) ainsi que le bruit de la couche limite turbulente convertis en ondes sonores au bord de fuite (BRTE). Blandeau [13] s'est intéressé au bruit à large bande produit pour trois points de fonctionnements (décollage, croisière et atterrissage). Zawodny *et al.*

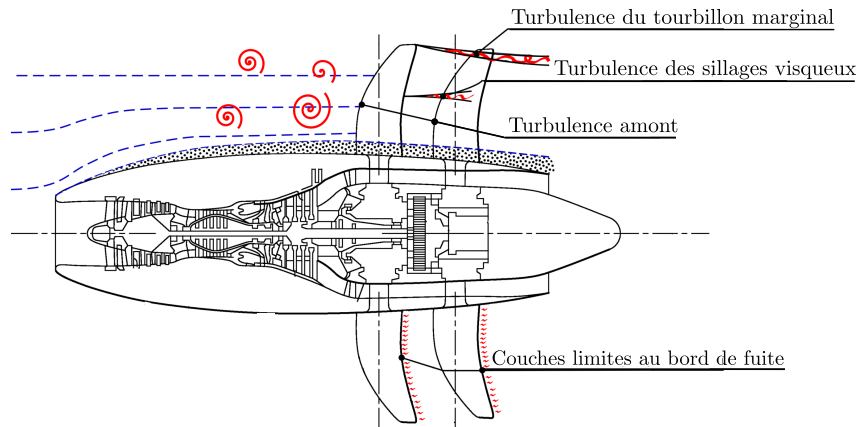


Figure 1.3 Décomposition des fluctuations de vitesses turbulentes pour un DHCR isolé.

[168] ont montré que les modèles BRWI et BRTE développés par Blandeau [13] permettaient de calculer adéquatement le bruit à large bande pour la configuration F31/A31. On distingue au maximum 10 dB d'écart entre le modèle et les résultats expérimentaux lorsque l'observateur est proche du plan de rotation et pour des hautes fréquences. Pour toutes les autres positions observateurs et fréquences, l'écart entre le modèle et les essais tombe en dessous de 3 dB. Nodé-Langlois *et al.* [112] ont obtenu des résultats plus mitigés pour des conditions de fonctionnement de type décollage ou atterrissage. En condition d'atterrissage 5 dB d'écart peuvent être observés pour la puissance acoustique intégrée en tiers d'octave. En effet, les entrées du modèle BRTE utilisent différentes corrélations empiriques pour caractériser l'intensité et le comportement de la pression aérodynamique turbulente au bord de fuite. Parmi les entrées de ces corrélations, on utilise le gradient de pression dans la direction de l'écoulement au niveau du bord de fuite des pales. Or Nodé-Langlois *et al.* [112] extraient des valeurs supérieures d'un ordre de grandeur à celles obtenues par Rozenberg *et al.* [131] pour construire le modèle empirique d'intensité des fluctuations de pression au bord de fuite. Dans le modèle proposé par Rozenberg *et al.* [131] l'effet d'un gradient de pression adverse à l'écoulement est pris en compte pour le calcul des fluctuations de pression au bord de fuite. Le modèle est construit grâce à 6 cas tests expérimentaux et numériques avec des profils fixes pour lesquels les conditions d'expériences sont différentes des conditions de fonctionnement des pales de DHCR. Les entrées turbulentes sont donc une extrapolation de la base de données créée par Rozenberg *et al.* [131]. Il est probable que la couche limite se comporte différemment pour les régimes d'écoulement des DHCR et par conséquent il serait nécessaire de caractériser leur comportement.

En conclusion, la prévision acoustique des DHCR doit prendre en compte le bruit tonal comme le bruit à large bande. De plus, le bruit tonal d'interaction est primordial pour des conditions d'approche ou de décollage. Ce bruit provient de l'interaction entre les fluctuations de vitesse déterministes produites par les pales et les surfaces en rotation. Pour des rotors d'envergure identique, l'impact du tourbillon marginal provenant de la tête des pales du rotor amont peut être le mécanisme dominant le bruit tonal d'interaction.

Les prévisions acoustiques présentées ont été obtenues par différentes méthodes. Celles-ci seront exposées dans la section suivante.

1.2 Rayonnement des sources de bruit aérodynamiques

1.2.1 Méthodes intégrales (analogies acoustiques)

Formulation temporelle

Lighthill [93] a développé le cadre de l'aéroacoustique en étudiant le bruit produit par un jet turbulent. L'idée principale est alors de définir deux régions dans l'écoulement. La première région contient les fluctuations de la vitesse turbulente. Ces fluctuations aérodynamiques forment les sources acoustiques. Ces sources rayonnent alors dans une deuxième région où l'écoulement est supposé uniforme ou au repos. Ce principe de séparation s'appelle l'analogie acoustique et est au cœur des méthodes indirectes.

Curle [28] a modifié l'analogie acoustique de Lighthill [93] si des surfaces solides fixes sont présentes dans l'écoulement. Ffowcs Williams et Hawkings [49] ont ensuite pris en compte la présence de solides indéformables en mouvement dans la région des sources acoustiques grâce à la théorie des distributions. Un solide est caractérisé par une fonction arbitraire f . La figure 1.4 montre que la fonction f est nulle à la surface du solide, négative à l'intérieur du volume solide et positive dans le fluide. En combinant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, Ffowcs Williams et Hawkings [49] (FWH) obtiennent l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Y_i^2} \right) \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial Y_i \partial Y_j} H(f) - \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\delta(f) \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial Y_j} \right) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta(f) U_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} \right). \quad (1.5)$$

Celle-ci décrit le comportement de la variation de masse volumique $\rho' = \rho - \rho_0$ liée à l'acoustique. Les quantités ρ_0 , p_0 et c_0 sont respectivement la masse volumique, la pression et la vitesse du son du fluide de référence supposé ici au repos. Les surfaces solides se déplacent suivant le vecteur vitesse $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ et les efforts du solide sur le fluide

relier au bruit propre des rotors alors que le bruit de charge instationnaire est relié au bruit d'interaction.

Le troisième terme est responsable du bruit d'épaisseur lié au déplacement du fluide par la pale. Pour les DHCR, ce bruit est dominant lorsque la vitesse des pales est près de ou supérieure à la vitesse du son [49].

Si propagation et génération acoustique sont découplées, l'équation de FWH est une équation d'onde inhomogène. On la résout grâce à la technique des fonctions de Green qui sont les solutions pour une source impulsionnelle de l'équation d'onde. La fluctuation de masse volumique liée à l'acoustique s'obtient alors par convolution d'une fonction de Green avec les sources acoustiques.

Fonction de Green

La fonction de Green caractérise le milieu de propagation des ondes sonores et les conditions aux limites de ce milieu. Elle fait le lien entre les sources acoustiques et le champ acoustique rayonné. Dans la littérature, on trouve notamment les fonctions de Green pour des conduits annulaires avec ou sans vitesse de convection [57], avec écoulement cisaillé [119] ou écoulement tournant [101]. Cependant dans le cadre des DHCR, la propagation est en champ libre. La fonction de Green associée s'écrit alors [57] :

$$G(\mathbf{X}, t | \mathbf{Y}, \tau) = \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{R'}{c_0}\right)}{4\pi R'}, \quad (1.7)$$

où $R' = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$ est la distance source-observateur indiquée sur la figure 1.4 ; (\mathbf{X}, t) sont respectivement les coordonnées spatiales et temporelles d'un observateur qui reçoit les ondes acoustiques émises à la position \mathbf{Y} et au temps τ des sources acoustiques. Le symbole $|$ effectue la séparation entre l'observateur au temps de réception et les sources acoustiques au temps d'émission.

Un DHCR est fixé sur un moyeu qui contient la partie du moteur concernant le flux chaud (compresseurs, chambre de combustion et turbines). Pour cette raison, Kingan *et al.* [80] ont modifié la fonction de Green en champ libre pour prendre en compte un moyeu rigide en forme de cylindre de longueur infinie. Cependant même si l'impact du moyeu peut être important (figure 1.5), cet effet sera négligé dans un premier temps ce qui revient à se restreindre aux propriétés intrinsèques des sources.

La convolution des sources acoustiques de l'éq. (1.5) avec la fonction de Green en champ libre de l'éq. (1.7) permet d'obtenir l'amplitude des fluctuations de masse volumique liées

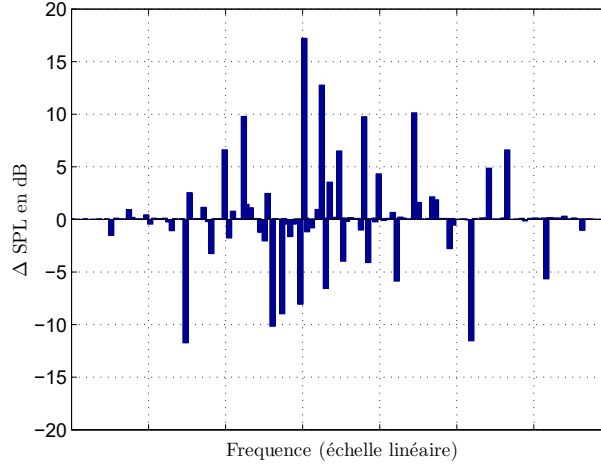


Figure 1.5 Différence de pression acoustique pour un observateur proche du plan de rotation induite par la prise en compte du moyeu dans la propagation acoustique. L'illustration est extraite de [80].

au bruit [57] :

$$\begin{aligned}
 4\pi c_0^2 \rho'(\mathbf{X}, t) = & \int_{-T}^T \int_V \frac{\partial^2}{\partial Y_i \partial Y_j} \left(\frac{\delta \left(t - \tau - \frac{R'}{c_0} \right)}{R'} T_{ij} \right) dV d\tau \\
 & - \int_{-T}^T \int_S \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\frac{\delta \left(t - \tau - \frac{R'}{c_0} \right)}{R'} F_i \right) dS d\tau \\
 & + \int_{-T}^T \int_S \rho_0 U_n \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\delta \left(t - \tau - \frac{R'}{c_0} \right)}{R'} \right) dS d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

L'intégration s'effectue dans le volume fluide V et sur les surfaces solides S présentées sur la figure 1.4. Sur S les sources acoustiques se composent des efforts et des vitesses normales à la surface respectivement $\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ et $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$. T est un temps d'intégration arbitraire qui considère qu'entre $-T$ et T toutes les sources acoustiques sont prises en compte pour reconstruire la pression acoustique ($c_0^2 \rho'$) au temps t .

L'équation (1.8) peut être simplifiée grâce aux propriétés des distributions de Dirac. En effet, les temps d'émissions τ_e des sources acoustiques contribuant au temps de réception t sont ceux qui respectent la condition :

$$g(\tau_e) = t - \tau_e - \frac{R'}{c_0} = 0. \tag{1.9}$$

Si les sources acoustiques sont en mouvement, la distance source-observateur est modifiée en $R'(\tau_e) = |\mathbf{X} - \mathbf{Y} + \mathbf{U}\tau_e|$. La recherche des coordonnées d'émission pour une source acoustique en mouvement rectiligne uniforme est donnée dans l'annexe B. L'équation (1.8) est simplifiée grâce à la propriété classique des distributions de Dirac :

$$\int_{-T}^T \mathcal{F}(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \sum_{n=0}^N \frac{\mathcal{F}(\tau_e^n)}{\left| \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau_e^n) \right|}, \quad (1.10)$$

où n désigne la n ème solution de l'équation (1.9). Si la source acoustique est en mouvement subsonique alors le temps d'émission τ_e est unique et on peut écrire [22] :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau_e) \right| = \left| -1 + \frac{\mathbf{U} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y} + \mathbf{U}\tau_e)}{c_0 R'} \right| = |1 - M_r|, \quad (1.11)$$

où M_r est le nombre de Mach relatif entre la source et l'observateur. De plus, si l'on considère la simplification suivante sur les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = -\frac{\partial}{\partial Y_i} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (1.12)$$

provenant des propriétés de symétrie de la fonction de Green en champ libre alors l'éq. (1.8) s'écrit :

$$4\pi c_0^2 \rho'(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \int_{V(\tau_e)} \left[\frac{T_{ij}}{R'|1 - M_r|} \right] dV(\tau_e) d\tau_e - \frac{\partial}{\partial X_i} \int_{S(\tau_e)} \left[\frac{F_i}{R'|1 - M_r|} \right] dS(\tau_e) d\tau_e + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(\tau_e)} \left[\frac{\rho_0 U_n}{R'|1 - M_r|} \right] dS(\tau_e) d\tau_e, \quad (1.13)$$

où $[\cdot]$ indique que la quantité considérée est prise au temps d'émission. Pour ce faire, l'éq. (1.9) est résolue de manière implicite. L'intégration surfacique et volumique des sources acoustiques ainsi que la résolution de l'éq. (1.9) se font de manière analytique ou numérique. Si l'on néglige le terme quadripolaire, on obtient :

$$4\pi c_0^2 \rho'(\mathbf{X}, t) = -\frac{\partial}{\partial X_i} \int_{S(\tau_e)} \left[\frac{F_i}{R'|1 - M_r|} \right] dS(\tau_e) d\tau_e + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(\tau_e)} \left[\frac{\rho_0 U_n}{R'|1 - M_r|} \right] dS(\tau_e) d\tau_e, \quad (1.14)$$

La première possibilité consiste en la résolution directe de l'équation (1.13). En champ libre, le terme volumique représente une quantité considérable de données. L'alternative utilisée est d'étendre l'éq. (1.5) pour des surfaces *perméables*. Si cette surface perméable englobe les sources acoustiques volumiques, tous les mécanismes responsables du bruit sont modélisés. Cependant, il faut prendre en compte la perméabilité de l'interface, notamment l'influence des variations de masse et de quantité de mouvement à son endroit [49]. Di Francescantonio [33] étend ainsi l'équation de FWH aux surfaces perméables :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Y_i^2} \right) \rho' = & \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial Y_i \partial Y_j} H(f) - \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\delta(f) \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial Y_j} \right) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta(f) U_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta(f) \rho' (U_i - u_i) \frac{\partial f}{\partial Y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\delta(f) \rho u_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} (U_j - u_j) \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

où f désigne cette fois-ci une surface perméable indéformable se déplaçant suivant le vecteur vitesse \mathbf{U} . En utilisant le principe de l'analogie acoustique, l'éq. (1.15) est résolue par le formalisme des fonctions de Green. Une solution similaire à l'éq. (1.14) est alors obtenue.

Cependant la résolution numérique de l'éq. (1.14) requiert de manipuler une quantité de données conséquente. En effet, pour un temps de réception t il faut chercher les différents temps d'émission τ_e^n respectant l'éq. (1.9) pour S .

Casalino [22] propose une approche en *temps avancé*. Un temps source τ_e^n contribue *partiellement* à l'acoustique reçue à différents temps de réception respectant toujours l'équation (1.9). L'acoustique au temps t est obtenue cumulativement pour différents temps sources. Cette méthode est appropriée lorsque les sources acoustiques sont calculées par CFD. En effet, à chaque pas de temps calculé par le solveur aérodynamique la technique de Casalino [22] est appliquée. De cette manière, la convergence et la qualité de la prévision acoustique sont immédiatement accessibles en manipulant un nombre minimal de données. La formulation décrite par Di Francescantonio [33] est résolue en *temps avancé* comme validation de la méthode fréquentielle présentée peu après et calculée dans l'annexe B.

Colin *et al.* [25] ont utilisé l'analogie acoustique de FWH pour le bruit tonal des DHCR. Comparée à des expériences, la méthode FWH numérique sur les surfaces solides prévoit le bruit tonal propre aux rotors au dB près. Ce n'est pas le cas pour la directivité du bruit tonal d'interaction. En effet, l'écoulement tournant induit par le DHCR crée une couche de cisaillement. Or cette couche de cisaillement réfracte les ondes sonores [4]. Pour améliorer la prévision acoustique, une méthode FWH en surface perméable est utilisée.

Cette surface est placée autour de la couche de cisaillement et le volume inter-rotor est finement discrétisé pour pouvoir capter les ondes acoustiques sortantes.

Formulation fréquentielle

Sous certaines conditions, des méthodes analytiques peuvent être utilisées pour calculer les intégrales des équations 1.13. Ces méthodes sont aussi qualifiées de fréquentielles puisqu'elles requièrent la transformation des sources acoustiques instationnaires (F_i, T_{ij}) dans le domaine fréquentiel. L'idée est de rendre la surface en mouvement indépendante du temps d'émission. Pour les DHCR, les repères relatifs attachés aux pales sont utilisés. Le calcul pour une source acoustique en rotation est détaillée dans l'annexe B pour les termes de charge de l'équation (1.13).

La solution de l'éq. (1.13) est analytique en utilisant une formulation en champ lointain géométrique. La distance source-observateur est alors linéarisée. De cette manière, la phase acoustique d'une source acoustique en rotation s'exprime par des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel de première espèce. Ces fonctions sont caractéristiques du bruit d'une source en rotation en champ libre. Elles sont obtenues entre autres par Gutin [64], Hanson [66] et Hanson et Parzych [67]. Une extension pour le champ acoustique proche par rapport à l'envergure de la pale a été développée par Kucukcoskun *et al.* [86]. La figure 1.6 présente le champ acoustique analytique caractéristique d'une source en rotation. Le champ acoustique tourne dans le sens de la rotation de la source acoustique et son amplitude décroît en $1/R'$.

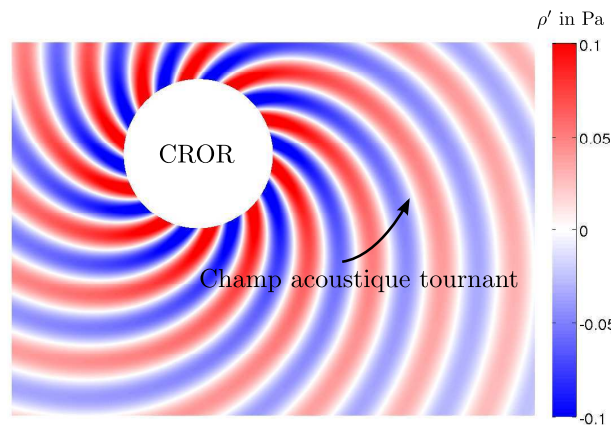


Figure 1.6 Pression acoustique instantanée d'une source acoustique en rotation. La solution du champ de pression provient d'une configuration canonique présentée dans l'annexe B (dipôle tangentiel).

Gutin [64] est le premier à prévoir le bruit de charge stationnaire des rotors. La flèche et le dévers sont négligés. Le rotor est supposé acoustiquement compacte ce qui signifie que

la taille caractéristique des sources acoustiques est faible comparée à la longueur d'onde acoustique. Pour une source en mouvement, le critère de compacité acoustique s'écrit [57] :

$$\Delta l_i k_r \ll 1 \iff \frac{\Delta l_i}{(1 - \bar{M}_r)} \ll \lambda, \quad (1.16)$$

avec Δl_i la longueur caractéristique de la source acoustique, \bar{M}_r le nombre de Mach relatif moyen entre la source et l'observateur et $k_r = \omega/(c_0(1 - \bar{M}_r))$ le nombre d'onde acoustique corrigé par les effets cinématiques. Le terme $(1 - \bar{M}_r)$ représente l'effet Doppler entre la source et l'observateur. La figure 1.7 présente l'effet de compacité.

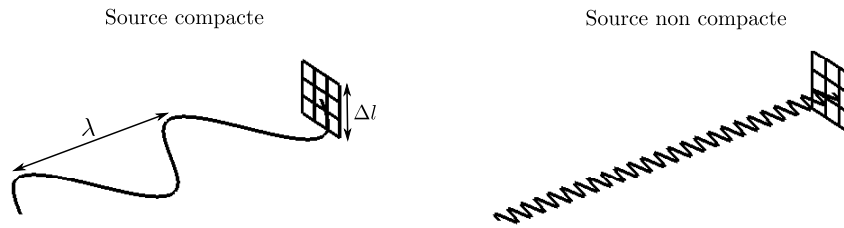


Figure 1.7 Schéma de compacité des sources acoustiques.

Dans la théorie de Gutin [64], chaque pale est une source acoustique en rotation dont l'intensité est déterminée grâce au couple et à la poussée du rotor. Dans cette méthode chaque pale du rotor est donc considérée comme acoustiquement compacte mais les effets d'interférence liés à la rotation des pales sont pris en compte.

Pour calculer le bruit de charge instationnaire, il faut prendre en compte les variations de flèche et de dévers caractéristique des DHCR [146]. Hanson [68] prend en compte ces particularités, ainsi que la non-compacité radiale des sources qui faisait défaut à la méthode de Gutin. Hanson développe tous les termes de l'éq. (1.14) en champ lointain dans un premier temps. Dans un second temps, il applique son modèle pour les DHCR d'un CROR [66]. Dans le plan de rotation du rotor aval, 2 dB d'écart sont obtenus entre les résultats expérimentaux et analytiques pour le DHCR du Fairey Gannet (fig. 2b) pour les 3 premières harmoniques. La directivité du bruit émis est captée à 3 dB près pour la fréquence fondamentale. L'écart monte à 5 dB pour la 4e harmonique où l'aérodynamique instationnaire est insuffisamment prédite. De plus, dans la formulation originale, le chargement instationnaire agit en phase le long de la corde, ce qui peut donner des erreurs à hautes fréquences. Soulat *et al.* [141] ont proposé une modélisation simplifiée de la non-compacité des sources dans la direction de la corde en utilisant des sources acoustiques décrites avec des valeurs complexes.

Une formulation plus complète est ensuite proposée par Hanson et Parzych [67] pour prendre en compte les effets de compacité ainsi que l'incidence des rotors. Les résultats analytiques et expérimentaux sont similaires (≈ 2 dB d'écart) pour une hélice conventionnelle à 2 pales, mais sont différents pour un propfan au décollage (≈ 10 dB d'écart). La raison de ces écarts pour le propfan provient de l'évaluation des sources acoustiques en tête de pale. Le chargement stationnaire provient d'un calcul Euler qui sous-prédit la variation radiale du chargement dans cette région.

Or pour un rotor non carénée en mouvement subsonique, le bruit de charge stationnaire est conditionné par l'évolution des forces aérodynamiques au niveau de l'extrémité de la pale (aussi appelée saumon de pale). Parry et Crighton [114] démontrent formellement cette dépendance grâce à l'approximation de grand nombre de pales ($B \rightarrow \infty$). Sur le Fairey Gannet, la prévision acoustique par la solution asymptotique s'écarte des résultats expérimentaux d'une valeur maximale de 3 dB pour $2BPF_{R2}$, alors que ces rotors n'ont que 4 pales. Les DHCR de CROR sont en général équipés d'une dizaine de pales par rotor. Ils sont donc particulièrement conditionnés par le chargement en tête de pale.

Envia [41] montre qu'en utilisant l'approximation de grand nombre de pales ($B \rightarrow \infty$), la phase acoustique d'une source en rotation sub- ou supersonique est aussi analytique pour le champ proche comme pour le champ lointain. Le point de départ est identique au calcul de Hanson et Parzych [67]. La solution est asymptotique et fait alors intervenir des combinaisons linéaires de fonctions d'Airy. On notera que ces fonctions sont équivalentes aux fonctions de Bessel de première espèce pour de grands arguments [1][*éq. (9.3.6) p.366*].

La solution d'Envia [41] est étendue pour un rotor avec effets d'incidences [40] et a été utilisée pour un DHCR plus récemment par Envia [42]. La figure 1.8 montre les résultats acoustiques de la configuration F31/A31 pour un observateur dans le plan de rotation. On observe que le modèle analytique donne des niveaux de pression acoustique proches de 3 dB des résultats expérimentaux pour la majorité des fréquences. Parmi ces fréquences, une grande partie est prédite convenablement (≈ 5 dB) avec les termes surfaciques (épaisseur (*Thickness* ou T) + chargement (*Loading* ou L)). Les termes volumiques améliorent certaines fréquences, notamment la (1,1), (2,1), (2,2) et la (3,1). Cependant, le point de fonctionnement est en croisière et donc l'écoulement est transsonique en tête de pale (nombre de Mach 1,03 pour $R2$).

En conclusion, les méthodes intégrales donnent de bons résultats pour la prévision du bruit tonal émis par les DHCR. Cependant, l'influence des surfaces solides comme le moyeu ou

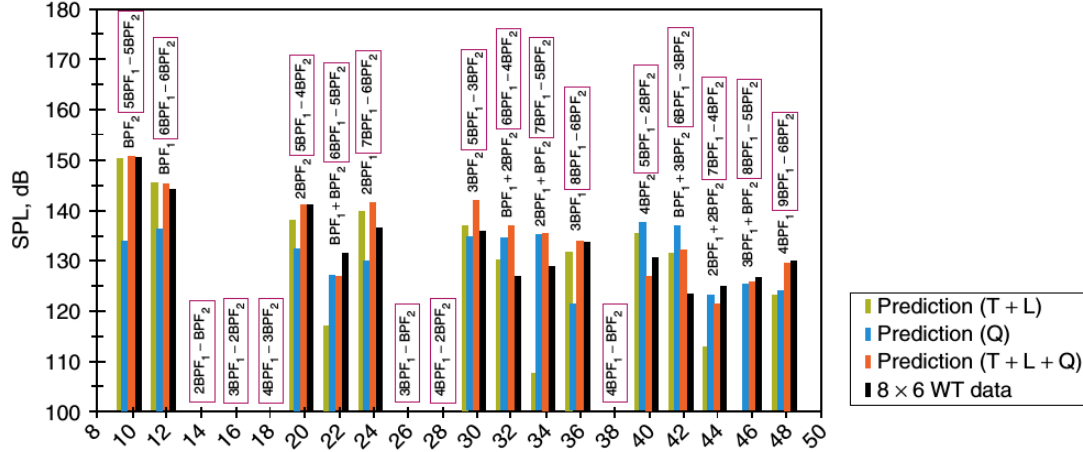


Figure 1.8 Pression acoustique pour un microphone à 1,16 m de l'axe de rotation (≈ 2 diamètres rotor) dans le plan de rotation. La géométrie est la F31/A31 (12x10) en régime de croisière (nombre de Mach axial 0,78 et 6848 tr/min pour $R1$ et $R2$) [42].

l'empennage et de l'écoulement moyen [25] peuvent donner lieu à des erreurs quant à la propagation acoustique.

1.2.2 Méthodes numériques

Une approche différente consiste à linéariser les équations de conservation pour modéliser la propagation acoustique [151]. Le milieu de propagation est discrétisé à l'aide d'un maillage volumique ou surfacique. L'impédance des surfaces est modélisée ainsi que l'influence de l'écoulement moyen. Des schémas numériques centrés et d'ordres élevés sont utilisés pour réduire au maximum la dispersion des ondes acoustiques [152].

Dans ces méthodes, on suppose que la viscosité n'influence pas la propagation acoustique. Ainsi les équations d'Euler sont utilisées. Celles-ci sont linéarisées autour d'un écoulement moyen. Cette méthode, appelée LEE (pour *Linearized Euler Equations*), allège les ressources numériques requises pour la prévision acoustique, puisque la viscosité et la turbulence ne sont pas modélisées, mais nécessite un maillage assez fin pour propager des ondes acoustiques hautes fréquences. Pour cette raison, on couple les résultats LEE en champ proche à des méthodes intégrales pour le champ lointain [85].

Pour les DHCR, on trouve cette méthode pour des configurations installées sur un avion complet [78]. Dans ce cas, des effets de masquage et de diffraction par le fuselage et l'empennage de l'avion modifient le bruit rayonnée [11]. La figure 1.9 montre le champ acoustique calculé par LEE pour un DHCR installé sur l'empennage d'un avion. On re-

marque l'effet de diffraction de l'empennage arrière. Cependant, loin des surfaces solides, le champ acoustique obtenu par la méthode LEE est qualitativement proche de celui obtenu par des méthodes intégrales fréquentielles présentées sur la figure 1.6.

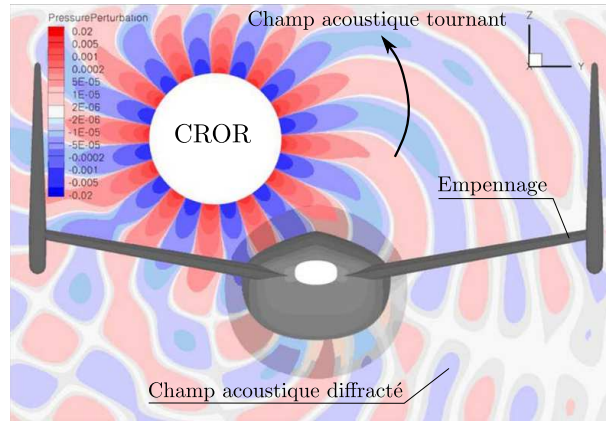


Figure 1.9 Pression acoustique instantanée à la BPF_{R2} d'un DHCR installé sur l'empennage arrière d'un avion. La coupe est effectuée dans le plan de rotation du DHCR. L'illustration est extraite de [78].

1.2.3 Conclusions

En conclusion, la méthode LEE est utilisée dans la littérature, mais réservée pour des configurations installées sur avion complet pour prendre en compte les effets de diffraction sur l'empennage ou le fuselage [78] pour des basses fréquences. En effet, l'application de ces méthodes requiert des ressources informatiques qui croissent avec la fréquence.

Pour les DHCR isolés, les méthodes intégrales sont les plus utilisées. Elles donnent de bons résultats comparés aux expériences pour des temps de calcul réalistes [25]. Les méthodes fréquentielles en champ lointain peuvent fournir des solutions quasi-analytiques de l'équation de FWH en faisant intervenir les fonctions de Bessel de première espèce [67]. Même si des corrections analytiques existent pour calculer le champ acoustique proche [86], les méthodes fréquentielles calculées en champ lointain sont efficaces dans l'évaluation du bruit des DHCR pour les populations riveraines des aéroports.

Pour finir, l'évaluation précise des sources acoustiques est fondamentale. En effet, les résultats acoustiques prédits par les méthodes hybrides s'éloignent rapidement des résultats expérimentaux si le calcul des sources acoustiques est imprécis [25, 66, 67].

1.3 Calcul des sources acoustiques

Deux méthodes sont utilisées dans la littérature pour calculer le chargement instationnaire nécessaire à la prévision du bruit d'interaction : les méthodes numériques et les méthodes analytiques.

1.3.1 Méthodes numériques

Plusieurs méthodes existent pour le calcul aérodynamique des DHCR [51]. Deux classes de résolution peuvent être utilisées pour calculer le chargement instationnaire sur les pales de DHCR :

- les méthodes résolvant les équations d'Euler où l'écoulement est supposé compressible, mais non visqueux,
- les méthodes par moyenne de Reynolds instationnaires (URANS) où l'écoulement est visqueux et compressible, mais où le comportement de la turbulence est décrit de manière stochastique.

Les premières méthodes permettent de calculer seulement le bruit tonal puisqu'aucune information sur le comportement de la turbulence n'est modélisée. Le bruit à large bande est donc calculé à partir des sources turbulentes obtenues des méthodes URANS. Cependant, la turbulence doit être reconstruite. Si la turbulence devait être résolue de manière exacte on pourrait considérer les méthodes directes, où l'écoulement est visqueux, compressible et où la turbulence est partiellement (LES) ou complètement résolue (DNS). Cependant, ces méthodes ne sont pas encore disponibles pour les DHCR à cause des considérations présentées ci-après.

Méthodes eulériennes

Les calculs Euler sont les simulations de base pour le calcul de l'interaction pale-tourbillon [27]. La taille caractéristique du tourbillon par rapport à la couche limite de la pale permet, en première approximation, de négliger les effets visqueux.

Falissard et Delattre [44], Falissard *et al.* [46] et Zehner *et al.* [169] ont observé l'impact de tourbillons canoniques sur une pale NACA 0002 en rotation. Le point de fonctionnement (nombre de Mach axial 0,25, nombre de Mach de rotation en tête de pale 0,65) est représentatif d'un DHCR en condition de décollement. Ils concluent que la modélisation du tourbillon est fondamentale dans la prévision acoustique des phénomènes OBVI. Ces conclusions ont pu déjà être formulées pour les pales d'hélicoptères [54]. Néanmoins, Falissard *et al.* [46]

montrent aussi que l'extrémité de pale influe sur le chargement instationnaire. En effet, l'intensité acoustique d'un événement OBVI est maximale lorsque le centre du tourbillon coïncide avec l'extrémité de la pale.

Malheureusement, les sillages visqueux ne sont pas reproduits par les simulations eulériennes. Le tourbillon d'extrémité du rotor amont même s'il est modélisé par une simulation eulérienne est influencé par la viscosité du fluide notamment pour la vitesse perpendiculaire à sa trajectoire [12]. Pour finir, une information sur la turbulence est nécessaire pour la prévision du bruit à large bande.

Méthodes URANS

Les méthodes URANS calculent le comportement moyen de la turbulence. Celle-ci est supposée homogène et isotrope et est modélisée à partir de la connaissance de l'écoulement moyen. Les modèles $k-\omega$ et $k-\epsilon$ sont généralement utilisés pour les DHCR [32, 161]. La turbulence est représentée par deux quantités : l'énergie cinétique turbulente k et la dissipation turbulente ϵ ou la dissipation turbulente spécifique ω . Ces quantités sont transportées dans l'écoulement grâce à deux équations d'advection-diffusion. Les modèles de turbulence à 2 paramètres présentent l'avantage d'indiquer non seulement l'intensité moyenne de la turbulence (k), mais aussi une échelle de turbulence intégrale (ϵ ou ω). Les deux sont nécessaires pour reconstruire un spectre de turbulence équivalent de type Liepmann *et al.* [92] ou de Von Karman [162] présenté au chapitre 2.4.

Le nombre des pales du rotor amont est en général différent de celui du rotor aval [35]. Des conditions aux limites périodiques ne sont donc plus valables pour une simulation mono-canal où une seule pale de chaque rotor est modélisée. Cette limitation est enlevée par l'utilisation de conditions aux limites chorochroniques. Grâce à la périodicité des phénomènes physiques dans chacun des canaux, une coïncidence spatio-temporelle permet de réaliser des calculs où les domaines des rotors amont et aval ne contiennent qu'une seule pale [24]. Cette méthode fonctionne seulement pour des configurations axisymétriques sans les effets d'incidence de l'écoulement amont ou les effets d'installation [73].

La qualité de la prévision acoustique des tons d'interaction dépend fortement de la qualité de la restitution des fluctuations de vitesse [25]. En effet, si le maillage est trop grossier les fluctuations de vitesse seront dissipées et dispersées. Cet effet est particulièrement visible à hautes fréquences pour les tons d'interaction où des différences de l'ordre de 5 dB peuvent être vues. L'influence de la topologie du maillage joue sur le bruit rayonné à hauteur de 5 dB sur certains angles d'émission. De la même manière, Carazo *et al.* [20] ont montré que certains sillages analytiques gaussiens ne permettaient pas de reproduire

le comportement des sillages numériques et rendaient la prévision acoustique imprécise de 10 dB sur certaines fréquences et angles d'émission. D'autres sillages analytiques en prenant en compte la dissipation et la dispersion du sillage entre le bord de fuite des pales amont et le bord d'attaque des pales aval ainsi que leurs formes différentes d'une gaussienne permettent d'obtenir des résultats plus précis [63].

Le principal problème des méthodes URANS concerne le temps de restitution. En effet, celui-ci peut s'élever à un mois. Pour 32 processeurs, Colin *et al.* [24] effectue un passage de pale en 1 semaine. Cette méthode est donc trop longue pour l'optimisation aéroacoustique.

Des méthodes fréquentielles existent pour réduire les temps de calcul. On mentionnera la méthode *Non-Linear Harmonic* (NLH) qui a été utilisée sur la configuration F31/A31 pour le calcul du bruit tonal [42] présenté sur la figure 1.8 pour les résultats du bruit d'épaisseur (T), de chargement (L) et quadripolaire (Q). Le problème des méthodes fréquentielles pour les DHCR est que les fluctuations de vitesse sont intenses et spatialement concentrées. En effet, les pales sont d'épaisseurs relatives faibles, les sillages sont donc fins et asymétriques. Par conséquent, le nombre d'harmoniques nécessaires pour converger vers une solution exacte devient grand [59]. En conséquence, le temps de calcul augmente et rend ces solutions moins attractives.

Cependant, les méthodes URANS ne modélisent que le comportement moyen de la turbulence. La simulation de la turbulence elle-même nécessite d'autres méthodes de calcul.

Méthodes directes

La turbulence s'obtient de manière exacte seulement avec des méthodes de résolution directe (DNS). Cependant lorsque les grandes échelles de la turbulence sont résolues, avec la simulation aux grandes échelles (Large Eddy Simulation ou LES) ou par des méthodes de Boltzmann discrètes (LBM), la turbulence de l'écoulement est calculée sur une plage de fréquence suffisante pour calculer le bruit rayonné. Les maillages doivent être fins pour capter les fluctuations turbulentes et acoustiques. De plus, les schémas numériques doivent être d'ordre élevé. En effet, les fluctuations acoustiques sont plusieurs ordre de grandeurs en dessous des fluctuations aérodynamiques. Ces précautions sur les schémas numériques sont prises pour éviter que les erreurs numériques du calcul des fluctuations aérodynamiques soit du même ordre que le bruit rayonné. Un maillage fin permet quant à lui de modéliser la propagation acoustique à des fréquences plus élevées en plus de réduire l'ordre de grandeur des erreurs numériques.

Pour la méthode DNS, l'intégralité du champ aérodynamique est calculée [108]. Cette méthode nécessite de résoudre toutes les échelles de turbulence jusqu'à l'échelle de Kol-

mogorov. Pour les fluctuations aérodynamiques, la taille du maillage doit être telle que le nombre de Reynolds local vaut 1. Le nombre de points d'un maillage CFD croît alors suivant $Re^{9/4}$ où Re est le nombre de Reynolds caractéristique du problème [118]. Pour un DHCR, le nombre de Reynolds basé sur la corde en tête de pale d'un DHCR ($U = 200 \text{ m.s}^{-1}$ et $c = 0,3 \text{ m}$) vaut approximativement $4,2 \cdot 10^6$. Cela implique un maillage de l'ordre de $8,0 \cdot 10^{14}$ points qui n'est pas réalisable par les supercalculateurs actuels.

La méthode LES réduit les ressources numériques nécessaires comparées à la DNS [89]. En effet, la turbulence est résolue jusqu'à une échelle minimale déterminée par le pas de temps du calcul et le maillage utilisé. Ensuite, la turbulence est modélisée pour des échelles inférieures. Les tailles de maillages induites par le nombre de Reynolds de l'écoulement d'un DHCR nécessitent des capacités numériques toujours au-delà de ce qui est actuellement disponible. En effet, le nombre de points nécessaires croît en Re^2 [118].

Une méthode basée sur les équations de Lattice-Boltzmann (LBM) permet d'obtenir des résultats acoustiques convaincants pour des coûts de simulation très réduits [87]. La méthode LBM ne résout pas les équations de Navier-Stokes de manière discrète. À la place, l'interaction et la convection de particules fluides est modélisée. Pour une explication détaillée des méthodes LBM, le lecteur pourra se référer au travail de Marié *et al.* [98]. La LBM est efficace pour les problèmes acoustiques, mais limitée à de faibles nombres de Mach ($0,3 \sim 0,5$) [52]. Les simulations LBM utilisent généralement des éléments cubiques où les particules ne peuvent prendre qu'un nombre fini de directions dans l'espace. Cette limitation sur le nombre de directions que la vitesse des particules peut prendre donne une solution approchée du tenseur des contraintes visqueuses dont l'erreur croît en général avec le cube du nombre de Mach de l'écoulement. En revanche, la simulation d'une onde plane acoustique convectée à nombre de Mach 0,2 montre qu'une simulation LBM avec des schémas en espace d'ordre 2 est aussi dissipative qu'une simulation DNS avec des schémas centrés d'ordre 6 [97]. Cependant, le problème est que les DHCR sont des machines tournantes à haut nombre de Mach ($0,7 \sim 0,8$ en tête de pale) ce qui rend les méthodes LBM encore inaccessibles.

En définitif, les méthodes DNS, LES et LBM sont encore inapplicables pour les DHCR.

1.3.2 Méthodes analytiques

Calculer le chargement instationnaire d'un profil par des méthodes analytiques permet de considérablement réduire les temps de calcul. La contrepartie est une géométrie et un écoulement idéalisés. Les solutions sont donc basées sur les équations d'Euler linéarisées.

Pour une pale en rotation, l'écoulement moyen varie principalement le long du rayon. Les solutions sont donc calculées par bandes de rayon [20]. Sur chacune de ces bandes, la géométrie et la cinématique des pales sont supposées constantes. Les phénomènes instationnaires (sillages, tourbillons, turbulence) sont les fluctuations de vitesse superposées à l'écoulement moyen et sont responsables du chargement instationnaire. Puisque le problème est linéaire, le lien entre fluctuations de vitesse et chargement instationnaire s'opère par l'intermédiaire d'une fonction de transfert à déterminer, en représentation fréquentielle.

La taxonomie des phénomènes physiques qu'un profil aérodynamique subit [88] est caractérisée par le nombre d'onde adimensionnel dans la direction de la corde :

$$k_x^* \equiv \frac{\omega b}{U}, \quad (1.17)$$

avec ω la pulsation du phénomène instationnaire considérée et U la vitesse de l'écoulement moyen autour d'un profil de corde $c = 2b$. On remarque que ce nombre est en lien avec la compacité acoustique présentée sur la figure 1.7 avec $kc = 2Mk_x^*$ et $M = U/c_0$ le nombre de Mach. Pour $k_x^* \ll 1$ la fluctuation a une longueur d'onde grande par rapport à la pale. La force instationnaire pourrait être calculée comme un ensemble discret de solutions stationnaires à différentes étapes de la fluctuation. C'est une solution *quasi stationnaire*. Par contre, pour $k_x^* \approx 1$, ces modèles ne sont plus représentatifs du comportement physique. La longueur d'onde du phénomène instationnaire est similaire à la corde. La réponse physique de la pale prend alors en compte le changement de conditions aux limites lorsque des fluctuations de vitesse incidentes interagissent avec la pale.

Méthodes compactes $|Mk_x^*| \ll 1$

Ces méthodes ont été les premières développées dans la littérature [122]. Elles se basent sur un développement incompressible des équations d'Euler linéarisées. De plus, les fluctuations de vitesse incidentes sont supposées sinusoïdales. La fonction de transfert incompressible de base s'appelle la fonction de Sears [138]. Celle-ci peut être corrigée pour prendre en compte les effets de compressibilité pour les basses fréquences [7]. Les fonctions de Sears compactes ont été utilisées pour calculer les réponses des pales de DHCR par Colin *et al.* [25]. La phase et l'amplitude sont correctement calculées par la méthode compacte compressible, cependant la prévision se limite aux fréquences d'interaction faibles.

Pour prédire plus spécifiquement ce qui se passe en tête de pale, le problème d'une fluctuation de vitesse sinusoïdale impactant une pale 2D finie en envergure a été traité par Peake [116]. Le résultat montre que, particulièrement en régime transsonique, l'extrémité

de pale influence les sources acoustiques obtenues. Inclure le saumon dans le calcul des sources acoustiques montre que l'angle de flèche n'est plus toujours un moyen efficace de réduire les sources et peut même dans certains cas les augmenter.

Cependant, ces méthodes ne sont pas appropriées pour la prévision acoustique d'un DHCR. En effet le nombre de Mach est élevé en tête de pale même pour les cas d'approche et de décollage ($0,7 \sim 0,8$). Il en va de même pour les fréquences d'interaction. Par conséquent, Mk^* est élevé. On recourt alors à des méthodes non compactes.

Méthodes non compactes $|Mk_x^*| > 1$

Amiet [8] a développé une méthode subsonique, compressible et non compacte qui ne requiert pas l'utilisation des méthodes de Wiener-Hopf, présentée en détail dans le chapitre 3. La méthodologie utilise la solution analytique de Schwarzschild pour les ondes électromagnétiques diffractées par une surface infiniment fine. Pour cette raison, cette technique s'appelle aussi méthode d'Amiet-Schwarzschild (A-S).

La solution d'A-S est aussi bien disponible pour des fluctuations de vitesse impactant le bord d'attaque [8] que pour des fluctuations de pression au bord de fuite [5]. Elle est utilisée aussi bien pour du bruit tonal [135] que pour du bruit à large bande [6] et elle donne des résultats satisfaisants pour $Mk_x^* > 2$ pour des mécanismes de bord d'attaque [8]. La condition $Mk_x^* > 2$ indique que la solution est valide pour les hautes fréquences.

La méthode suppose que la pale est 2D infinie en envergure et que les fluctuations de vitesse incidentes sont sinusoïdales ce qui est le cas après décomposition de Fourier de n'importe quelle fluctuation de vitesse. La simplicité de la solution de Schwarzschild permet différentes extensions, notamment pour des profils trapézoïdaux utilisés pour le bruit tonal d'interaction de sillages [19], mais aussi pour du bruit tonal de pylône [72] des DHCR. Elle s'est appliquée avec succès au bruit à large bande du bord de fuite des profils DHCR ainsi que pour l'impact des sillages turbulents par Blandeau [13].

Le bruit OBVI au niveau du saumon a été calculé par Roger *et al.* [128] pour un écoulement moyen parallèle au saumon. Cette étude étend la théorie d'Amiet [8] pour le calcul des sources en prenant en compte l'extrémité de pale avec une condition de Kutta au niveau du saumon. Le bruit émis est modifiée de 3 dB par l'inclusion de l'extrémité de pale dans le calcul des sources. En revanche, les résultats acoustiques de cette étude supposent que le profil n'était pas en rotation et que le tourbillon a seulement une vitesse azimutale. Or à la lumière des résultats asymptotiques présentés par Parry et Crighton [114] le chargement à l'extrémité de la pale est fondamental dans la prévision acoustique. Dans le cadre d'un modèle tonal d'impact OBVI, il faut donc prendre en compte cette particularité.

Carazo *et al.* [20] ont montré par ailleurs qu’une prévision acoustique précise des DHCR grâce à des méthodes analytiques du calcul des sources est précise si et seulement si la phase radiale de ces fluctuations est correctement modélisée et que les fluctuations de vitesse sont calculées de manière précise. La dernière remarque est partagée par Jaron *et al.* [75]. En effet, les fluctuations de vitesse sont dissipées et dispersées durant leur trajet entre le bord de fuite des pales amont et le bord d’attaque des pales aval.

1.3.3 Conclusions

Différentes méthodes numériques et analytiques existent pour le calcul des sources acoustiques pour les DHCR. Le principal problème provient de l’évaluation du chargement instationnaire sur les pales.

En ce qui concerne les méthodes numériques, même si la physique d’un OBVI est captée par une simulation Euler, les sillages et le tourbillon de tête nécessitent l’utilisation de modèles visqueux pour prévoir le bruit tonal. Les modèles URANS pallient ce problème en donnant le chargement instationnaire sur les pales, mais le temps de calcul de ces modèles est encore prohibitif.

L’alternative se porte alors sur des méthodes analytiques du calcul du chargement instationnaire. Les méthodes analytiques incompressibles sont faciles d’utilisation, mais ne s’appliquent pas pour les DHCR, car le paramètre Mk_x^* est grand. Pour cette raison, les méthodes analytiques compressibles sont utilisées. Celles-ci reposent sur la méthode proposée par Amiet [8], appelée méthode d’Amiet-Schwarzschild dans le reste du manuscrit. Cette méthode permet une évaluation précise du chargement instationnaire si et seulement si les fluctuations de vitesse incidentes sont évaluées de manière fiable.

1.4 Méthodologie adoptée

En conclusion, la méthodologie adoptée est présentée sur la figure 1.10. Elle comprend :

1. l'évaluation des fluctuations de vitesse en utilisant des méthodes RANS ou URANS.
Le but est d'obtenir précisément les fluctuations de vitesse au niveau du bord d'attaque de la pale aval. Un soin particulier sera porté à l'évaluation de la vitesse tourbillonnaire liée au tourbillon marginal provenant du rotor amont ainsi qu'aux sillages turbulents.
2. L'évaluation du chargement instationnaire à l'aide d'une méthode analytique non-compacte dérivée d'Amiet [8]. Cette méthode sera modifiée pour prendre en compte les effets d'extrémité essentiels à l'évaluation sonore des rotors en rotation subsonique.
3. La prévision du bruit en champ lointain par la méthode analytique proposée par Hanson et Parzych [67].

Cette méthodologie sera validée par comparaison avec des résultats acoustiques expérimentaux ou numériques sur le DHCR FL05/AL05 présenté dans l'annexe A. Les résultats expérimentaux serviront à comparer les résultats du bruit tonal et à large bande tandis que la méthode numérique pourra servir de comparaison à la méthodologie proposée pour le bruit tonal. La méthode numérique se compose d'un calcul URANS associé à la méthode fréquentielle d'Hanson et Parzych [67]. Par contre, les différents phénomènes physiques sont plus facilement modélisés dans certains repères appropriés qui sont décrits ci-après.

en utilisant les écritures *cartésiennes*, *cylindriques* et *sphériques* du référentiel \mathfrak{R}_0 . La vitesse du flux d'air du DHCR est notée U_X dirigée suivant \mathbf{e}_X pointant de l'amont vers l'aval ; $\Theta = 0^\circ$ pointe vers l'aval du DHCR et $\Phi = 0^\circ$ coïncide avec la direction \mathbf{e}_Z . Il est important de préciser que le vecteur directeur \mathbf{e}_R est différent entre les notations sphérique (figure 1.11a) et cylindrique (figure 1.11b) des coordonnées. À partir de ce repère global où sont décrits les microphones, le repère associé à une pale aval est décrit dans un premier temps. Puis les repères utilisés pour l'interaction pale-tourbillon et pour l'interaction avec les sillages sont successivement présentés dans un second temps.

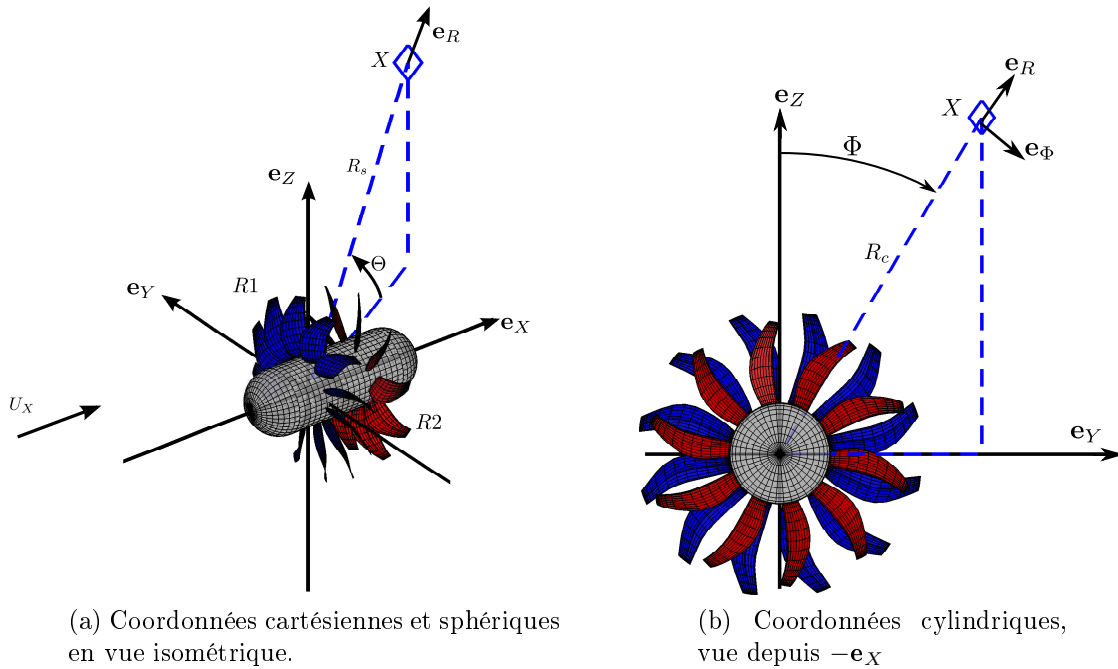


Figure 1.11 Définition du repère global \mathfrak{R}_0 .

1.5.2 Repères associés aux fluctuations de vitesses

Tourbillon marginal

Ces repères permettent d'exprimer les vitesses provenant du tourbillon marginal en tête des pales de $R1$. Pour une pale amont, la trajectoire du centre du tourbillon dans le repère \mathfrak{R}_0 suit la ligne décrite par \mathbf{X}_v :

$$\mathbf{X}_v = \begin{cases} (X_v, Y_v, Z_v)_{\mathfrak{R}_0} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ (X_v, R_v, \Phi_v)_{\mathfrak{R}_0} & \text{en coordonnées cylindriques} \end{cases} . \quad (1.19)$$

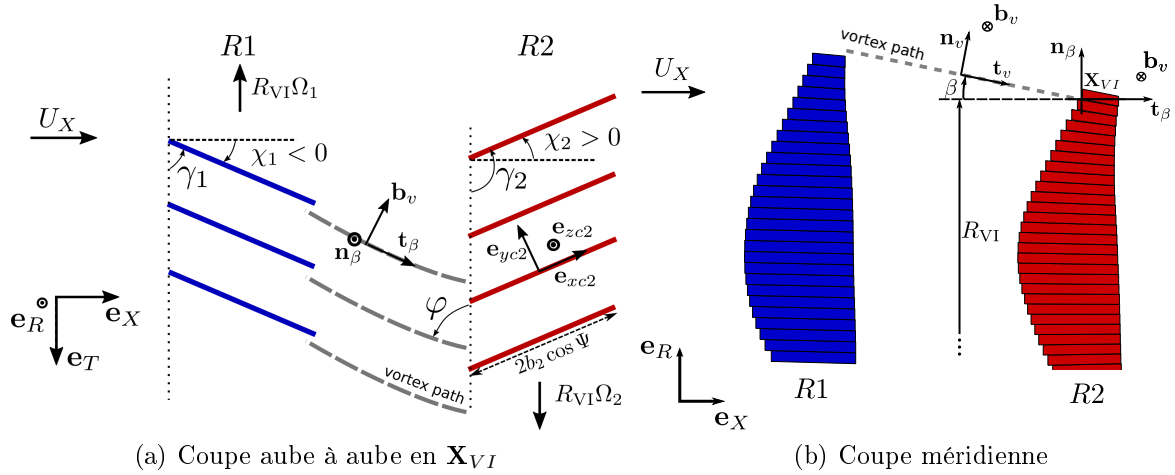


Figure 1.12 Repères intermédiaires pour la modélisation du tourbillon marginal.

qui est illustré sur la figure 1.12. Cette trajectoire est génératrice du repère local associé au tourbillon :

$$\mathfrak{R}_v = \begin{cases} (\mathbf{X}_v, \mathbf{t}_v, \mathbf{b}_v, \mathbf{n}_v)_{car} \\ (\mathbf{X}_v, \mathbf{t}_v, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)_{cyl} \end{cases}, \quad (1.20)$$

où \mathbf{t}_v est le vecteur directeur tangent à la trajectoire et $(\mathbf{n}_v, \mathbf{b}_v)$ sont les vecteurs du plan perpendiculaire à \mathbf{t}_v en coordonnées cartésiennes et $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ leurs équivalents en coordonnées cylindriques. La trajectoire du tourbillon croise le bord d'attaque d'une pale aval en :

$$\mathbf{X}_{VI} = (X_{VI}, R_{VI}, \Phi_{VI})_{\mathfrak{R}_{0,cyl}}. \quad (1.21)$$

Pour une coupe cylindrique à R_{VI} constant, le repère déroulé associé au rotor amont est :

$$\mathfrak{R}_{R1} = (\mathbf{X}_{VI}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T)_{car}, \quad (1.22)$$

où on remarque que \mathbf{e}_T et \mathbf{e}_Φ sont dans le même sens et permettent d'obtenir un repère direct avec \mathbf{e}_R pointant dans la direction de la tête de pale.

En \mathbf{X}_{VI} , le passage du repère \mathfrak{R}_v au repère \mathfrak{R}_{R1} s'effectue en utilisant la position azimutale dans le repère du tourbillon θ_v , l'angle de contraction de la veine fluide β , l'hélicité du tourbillon φ . Les différentes matrices de rotation sont données dans l'annexe C, mais sont résumées dans le tableau 1.1.

Sillages turbulents

D'une manière similaire au tourbillon, les sillages sont décrits dans le repère attaché au rotor amont sur la figure 1.13. Cependant, contrairement au tourbillon qui est localement créé en tête de pale, les sillages sont continûment créés le long de l'envergure de la pale. Par conséquent, les pales amont et aval sont découpées par bandes de rayon [119]. Sur ces bandes les sillages sont alignés avec le calage local de la pale χ_1 . De cette manière, le repère associé aux sillages du rotor amont \mathfrak{R}_w s'obtient par rotation de χ_1 autour de l'axe \mathbf{e}_R du repère déroulé \mathfrak{R}_{R1} :

$$\mathfrak{R}_w = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{xc1}, \mathbf{e}_{yc1}, \mathbf{e}_{zc1})_{car}. \quad (1.23)$$

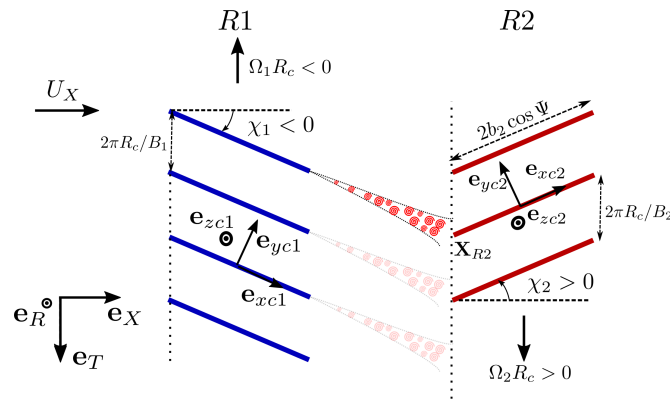


Figure 1.13 Coupe aube à aube à R_c constant pour la modélisation des sillages.

où \mathbf{X}_{R2} désigne le bord d'attaque des pales aval à un rayon fixé R_c . Les différentes matrices de rotation associées sont données dans le tableau 1.1 mais à la lumière des figures 1.12 et 1.13, la description du repère associé à la pale aval est décrit.

Nom du référentiel	Vecteurs directeurs	Axe de rotation	Angle de rotation
\mathfrak{R}_w	$(\mathbf{e}_{xc1}, \mathbf{e}_{yc1}, \mathbf{e}_{zc1})$	\sim	\sim
$\mathfrak{R}_{v,cyl}$	$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_v)$	\sim	\sim
$\mathfrak{R}_{v,car}$	$(\mathbf{b}_v, \mathbf{n}_v, \mathbf{t}_v)$	$(0, 0, 1)$	θ_v
$\mathfrak{R}_{\beta,car}$	$(\mathbf{b}_v, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\beta)$	$(1, 0, 0)$	β
\mathfrak{R}_{R1}	$(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T)$	$(0, 1, 0)$	φ ou χ_1
\mathfrak{R}_p	$(\mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2}, \mathbf{e}_{xc2})$	$(0, 1, 0)$	χ_2
$\mathfrak{R}_{p'}$	$(\mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{z'c2}, \mathbf{e}_{x'c2})$	$(1, 0, 0)$	Ψ

Tableau 1.1 Référentiels utilisés pour passer du repère associé au tourbillon \mathfrak{R}_v ou aux sillages \mathfrak{R}_w au repère lié à la pale aval $\mathfrak{R}_{p'}$. L'ordre des vecteurs directeurs est modifié par permutation directe pour mettre en valeur l'axe de rotation associé au changement de repère. Le centre de rotation utilisé est \mathbf{X}_{VI} pour le tourbillon et \mathbf{X}_{R2} pour le sillage.

1.5.3 Repères associés aux pales du rotor aval

À cause de la rotation de la pale, le repère est déroulé à un rayon R_c en coordonnées cylindriques. À cette position, le bord d'attaque de la pale aval est selon \mathbf{X}_{R2} . L'angle de flèche Ψ et la longueur de corde $c_2 = 2b_2$ sont extraits et le repère déroulé associé à une pale aval est :

$$\mathfrak{R}_p = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})_{car}. \quad (1.24)$$

En tête de pale, l'effet de la contraction de la veine fluide doit être pris en compte dans la cinématique. Pour se faire, le vecteur vitesse est modifié par l'angle de la contraction de la veine fluide, β . Cet angle est positif pour une vitesse radiale (\mathbf{e}_{zc2}) négative illustrée sur la figure 1.14a. Si la pale aval a un angle de flèche Ψ comme indiqué sur la figure 1.14b, le repère associé à la pale aval est alors $\mathfrak{R}_{p'}$ obtenu par rotation de \mathfrak{R}_p autour du point \mathbf{X}_{R2} par l'angle de flèche Ψ :

$$\mathfrak{R}_{p'} = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{x'c2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{z'c2})_{car}. \quad (1.25)$$

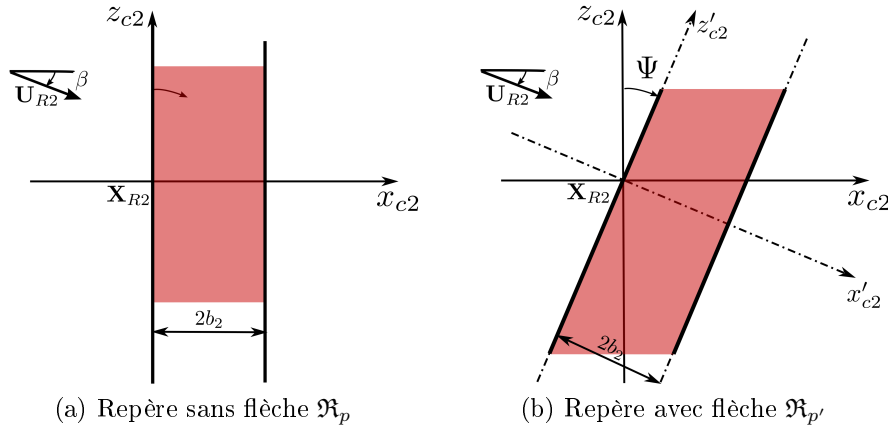
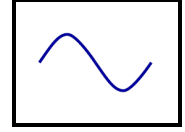


Figure 1.14 Définition des repères associés aux pales aval.

CHAPITRE 2



FLUCTUATIONS DE VITESSE INCIDENTES (EXCITATIONS AÉRODYNAMIQUES)

2.1 Introduction

La première étape consiste en la modélisation des fluctuations de vitesse aussi bien déterministes (tourbillon, sillage) que turbulentes (sillages).

À la lumière des résultats de Carazo *et al.* [20], la modélisation du bruit tonal s'est finalement portée vers l'extraction des différentes composantes de vitesses au bord d'attaque des pales aval depuis un calcul URANS. Fort de ce constat, il faudra après avoir caractérisé les tourbillons présents sur des DHCR, porter une attention particulière à la qualité des modélisations tourbillonnaires disponibles dans la littérature.

Dans le but d'accélérer les outils de prévision sonore dans les étapes d'avant-projet les calculs RANS peuvent être utilisés. Les méthodes de type *plan de mélange* sont utilisées car les performances aérodynamiques pour la pale aval sont alors correctement prédites contrairement aux méthodes de type *frozen rotor* [105]. Cependant l'utilisation de calculs RANS ne permet pas d'avoir la fluctuation de vitesse au niveau du bord d'attaque de la pale aval, car la fluctuation est moyennée dans la direction azimutale au niveau du plan de mélange. Or Jaron *et al.* [75] ont montré qu'il est nécessaire de prendre en compte la diffusion des fluctuations de vitesse. Il faudra donc modéliser cet effet. Pour finir, la méthodologie suppose que l'on ait des tourbillons et des sillages séparés, or le calcul RANS donne un champ aérodynamique continu. Il faut donc séparer la contribution attribuée au tourbillon de celle associée au sillage dans les données d'entrée.

Les fluctuations de la vitesse turbulente, quant à elles, ne peuvent pas être décrites directement car l'utilisation de la LES pour des DHCR est pour l'instant inaccessible. Cependant, avec des outils stochastiques et des considérations physiques examinés ci-après, les modèles RANS sont capables de modéliser un comportement spectral des fluctuations de la vitesse turbulente [30, 109, 112]. Par rapport à l'étude du bruit tonal, on décrira une étape supplémentaire : le passage des grandeurs turbulentes moyennées à la description stochastique de l'écoulement turbulent.

Grâce aux conclusions tirées de la littérature et avec la méthodologie sélectionnée, l'approche adoptée consistera à :

1. Caractériser les tourbillons et sillages dans les DHCR.
2. Modéliser le comportement cinématique des tourbillons et des sillages.
3. Séparer les différentes excitations.

Dans la première étape, on étudiera les fluctuations de vitesse déterministes. On commencera par étudier la taxonomie des tourbillons et on sélectionnera les modèles adaptés à la configuration FL05/AL05 présentés dans l'annexe A. La diffusion du tourbillon pendant sa convection de l'amont vers l'aval sera aussi modélisée.

Dans un second temps, puisque la modélisation tourbillonnaire doit être compatible avec les modèles antérieurs concernant les sillages visqueux, les fluctuations déterministes provenant des sillages et des tourbillons seront séparées.

Pour finir, on modélisera l'intensité des sillages turbulents provenant du rotor amont.

2.2 Modélisation du tourbillon

2.2.1 Description d'un tourbillon

Pour décrire le bruit d'interaction pale-tourbillon, il faut d'abord définir un tourbillon de manière formelle. Or au-delà d'une réponse intuitive, aucune définition ne fait encore consensus dans la littérature scientifique. Plusieurs définitions pour ces structures cohérentes ont vu le jour. Lugt [95] propose la définition suivante :

A vortex is the rotating motion of a multitude of material particles around a common center.

Cette définition est trop vague pour être utilisable. Aucune notion temporelle n'est introduite et le terme *multitude* reste abstrait. Néanmoins, l'auteur décrit ce que l'on observe dans la nature et les expériences de la mécanique des fluides.

Plus tard, Robinson [125] améliorera la description de Lugt :

A vortex exists when instantaneous streamlines mapped onto a plane normal to the vortex core exhibit a roughly circular or spiral pattern, when viewed from a reference frame moving with the center of the vortex core.

Cette fois-ci, la définition comprend une notion temporelle (*instantaneous streamlines*), et un référentiel privilégié (*plane normal to the vortex core*). Cependant, elle requiert la connaissance de l'orientation et de la trajectoire du coeur du tourbillon pour son observation. Plus récemment, Lesieur [91] donne une définition plus quantitative des tourbillons :

1. *the vorticity concentration ω should be high enough so that a local roll up of the surrounding fluid is possible,*
2. *they should approximately keep their shape during a time T_c far enough in front of the local turnover time ω^{-1} ,*
3. *they should be unpredictable.*

Cette fois-ci encore, on retrouve la notion d'entraînement circulaire des particules fluides. D'une part, la quantité physique qui caractérise un tourbillon est définie : la *vortacité*. Cette quantité sera décrite un peu plus tard dans ce chapitre. D'autre part, la persistance temporelle de ce tourbillon au regard de l'écoulement global est définie plus précisément en lui assignant un temps caractéristique $T_c \gg \omega^{-1}$. Parmi toutes ces définitions, certaines caractéristiques se regroupent et seront donc développées :

- Le centre de la rotation,
- la zone d'influence de la rotation,
- la persistance du phénomène.

2.2.2 Éléments de la dynamique tourbillonnaire

Équations fondamentales

Au regard de la définition de Robinson [125] et du caractère rotatif de l'écoulement, on étudiera les équations de Navier-Stokes dans le repère cylindrique (z, r, θ) où le vecteur vitesse s'écrit $\mathbf{u} = (u_z, u_r, u_\theta)$. On considérera aussi les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

- incompressibilité $[\nabla \cdot \mathbf{u} = 0]$,
- axisymétrie $[\partial/(\partial\theta) = 0]$,
- bidimensionnalité $[\partial/(\partial z) = 0]$,
- absence de force de pesanteur.

Avec les hypothèses précédentes, les équations générales de Navier-Stokes [55] deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right], \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right], \end{cases} \quad (2.1)$$

avec p la pression, ρ_0 la masse volumique du fluide et ν sa viscosité cinématique.

Si l'on suppose que la vitesse est purement circulaire (*i.e* : les trajectoires des particules font des cercles) alors la vitesse radiale est nulle. Les équations précédentes se simplifient alors :

$$\begin{cases} \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right]. \end{cases} \quad (2.2)$$

La première équation traduit l'équilibre radial. Cette équation peut être vue comme l'analogie de la force centrifuge dans une description eulérienne du mouvement. Si une particule fluide tourne autour d'un axe alors elle subit une force dirigée vers le centre de la rotation opposée à l'inertie du fluide qui agit comme une pseudo-force centrifuge. Tous les modèles de tourbillon présentés ci-après respectent cette équation. La deuxième équation est descriptive du comportement temps-espace d'un tourbillon. La variation temporelle de la vitesse de rotation n'est influencée que par le frottement visqueux produit par le cisaillement de la vitesse azimutale dans la direction radiale. Pour l'air, on remarque que la viscosité cinématique est faible ($\nu \approx 5,10^{-5} \text{m}^2.\text{s}^{-2}$), ce qui implique que certains tourbillons soient persistants dans le temps [111].

À partir de ces équations de base, certaines grandeurs caractéristiques d'un écoulement tournant peuvent être calculées et examinées.

Grandeurs caractéristiques des tourbillons

Vorticité La vorticité, noté par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$, est définie comme le rotationnel du vecteur vitesse \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \wedge \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Ce vecteur caractérise, dans le cadre d'une rotation solide du fluide, la vitesse angulaire. Suivant Boussinesq [154] :

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ est défini comme deux fois la vitesse angulaire instantanée autour des axes principaux extraits grâce à la matrice gradient de vitesse centrée autour du point \mathbf{x} .

Ce vecteur vorticité peut se retrouver de manière équivalente dans la partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse (\mathbf{J}). En repère cartésien $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ ce tenseur se détermine par :

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

De plus, on déduit de la définition de la vorticité que sa divergence est nulle. Cette caractéristique aura des conséquences pour certaines propriétés des tourbillons que l'on décrira un peu plus loin.

Circulation Les moments d'un tourbillon sont des grandeurs intégrées qui caractérisent le tourbillon. En l'occurrence, le premier moment de vitesse s'appelle la circulation notée Γ et se calcule par :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.5)$$

avec C un contour fermé de la surface S dont la normale est \mathbf{n} . La méthode classique consiste à intégrer sur des cercles pour des tourbillons axisymétriques. Γ devient alors dépendant du rayon considéré. Cependant, si l'on veut caractériser la quantité de rotation globale d'un tourbillon, on prendra le contour d'intégration le plus grand possible. Pour un écoulement externe, on écrit alors :

$$\Gamma_g = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Gamma(r) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} r dr d\theta. \quad (2.6)$$

L'élément différentiel cylindrique ($r d\theta$) donne deux types de tourbillons. Ceux pour lesquels la vorticité se comporte en $1/r$ quand on calcule la circulation globale. Ces tourbillons donnent alors une circulation constante. À l'inverse, les autres tourbillons dont la vorticité se comporte $1/r^\alpha$, $\alpha > 1$ ont une circulation globale nulle. Le cas où la vorticité se comporte en $1/r^\alpha$, $\alpha < 1$ ne peut exister pour un écoulement externe, car une pale réaliste

d'envergure finie ne peut produire une circulation totale infinie. En revanche localement, rien n'empêche ce type d'écoulement. Il intervient notamment sur des ailes delta et permet de gagner en portance dans des régimes d'angles d'attaque où les ailes conventionnelles décrochent [103].

Rayon du tourbillon À partir des équations (2.2), on peut directement déduire des modèles de tourbillons. Cependant, pour une étude préliminaire, on considère en premier lieu des écoulements simples comme les écoulements potentiels. On ajoutera alors les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

- stationnarité $\left[\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$,
- irrotationnalité $[\nabla \wedge \mathbf{u} = 0]$,
- fluide parfait $[\nu = 0]$.

L'irrotationnalité et l'hypothèse de fluide parfait permettent d'affirmer que \mathbf{u} dérive d'un potentiel, appelé Φ tel que $\nabla \cdot \Phi = \mathbf{u}$. En deux dimensions, deux potentiels sont nécessaires pour décrire l'écoulement. Ce deuxième potentiel est orthogonal à Φ et est communément noté Ψ . Si l'on trace les lignes d'iso-valeur de Ψ pour un écoulement donné celles-ci se confondent avec les lignes de courant. Pour cette raison Ψ est appelée la fonction de courant et Φ le potentiel de l'écoulement. Si les lignes de courant décrivent des cercles, la fonction de courant, se définit comme Gerhart *et al.* [55] :

$$\Psi(r) = -K \ln(r), \quad (2.7)$$

et le potentiel se définit comme :

$$\Phi(\theta) = K\theta. \quad (2.8)$$

$\Psi(\theta)$ peut avoir une variation selon θ car ce n'est pas une variable aérodynamique. On peut alors le dériver afin d'obtenir l'expression de la vitesse tangentielle :

$$u_\theta(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{K}{r}. \quad (2.9)$$

La principale caractéristique de l'écoulement est la singularité de la vitesse au centre du tourbillon ($r = 0$). Cette singularité est possible du fait de l'hypothèse des fluides non visqueux. On dit alors que ce tourbillon est *libre*. Cette singularité de la vitesse azimutale peut être éliminée en considérant un écoulement fluide entre deux cylindres concentriques tournant à deux vitesses de rotation différentes. Si l'on suppose que le cylindre intérieur, situé en $r = R_{in}$, tourne à la vitesse Ω_{in} et si le cylindre extérieur est situé en $r = R_{out}$ et tourne à la vitesse Ω_{out} alors, loin des régimes d'instabilités décrits par Taylor [153], la solution stationnaire de la vitesse azimutale pour les éqs. (2.2) s'écrit :

$$u_\theta(r) = \frac{R_{in}^2 \Omega_{in}^2 - R_{out}^2 \Omega_{out}^2}{R_{out}^2 - R_{in}^2} r + \frac{R_{in}^2 \Omega_{in} (1 - \Omega_{out}/\Omega_{in})}{1 - (R_{out}/R_{in})^2} \frac{1}{r} = Ar + \frac{B}{r}. \quad (2.10)$$

On peut imaginer deux solutions asymptotiques qui représentent un tourbillon. Dans un premier cas, on peut représenter la solution proche du centre de l'écoulement. Pour cela, on suppose $R_{in} \rightarrow 0$ et $\Omega_{in} = 0$. On trouve :

$$u_\theta(r) = \Omega_{out} r. \quad (2.11)$$

Le fluide se comporte comme un corps rigide en rotation. L'écoulement est à rotationnel constant, entraîné par la rotation du cylindre extérieur. Dans ce cas, ce tourbillon est donc dit *forcé*. Dans un deuxième cas on suppose $R_{in} = 0$, $\Omega_{out} = 0$ et $R_{out} \rightarrow +\infty$. On retombera sur la solution potentielle obtenue décrite par l'équation (2.9). Un tourbillon peut alors être considéré comme une combinaison d'un entraînement visqueux régi par la solution d'un corps rigide en rotation et d'un écoulement irrotationnel, qui relaxe la vitesse de rotation à l'infini. Cette approche, appelée tourbillon de Rankine, s'écrit :

$$\begin{cases} u_\theta(r) = \Omega_{out} r & r < r_0, \\ u_\theta(r) = \frac{\Omega_{out} r_0^2}{r} & r \geq r_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour la première fois, on obtient une notion de taille du tourbillon grâce au paramètre r_0 . Cette distance appelée rayon du tourbillon caractérise la transition entre les parties *forcée* et *libre* du tourbillon. D'une part, on remarque que ce rayon est décrit comme *visqueux* par Fabre [43]. D'autre part, on remarque que le tourbillon de Rankine n'est pas physique au premier ordre puisqu'il y a une discontinuité du gradient de vitesse entre la partie interne et la partie externe du tourbillon. La définition du rayon d'un tourbillon n'est pas

universelle. En effet, on peut trouver dans la littérature le rayon de dispersion [12] basé sur le moment d'ordre 2 de la vorticité du tourbillon, le rayon de roulis basé sur le pseudo-moment d'ordre 1 de la vorticité et le rayon énergétique [43] basé sur le rayon d'un tourbillon de Rankine équivalent ayant la même énergie cinétique que le tourbillon considéré.

Ces descriptions d'ordres plus élevés pour le rayon du tourbillon ne seront pas à l'étude ici car les modèles de tourbillons décrits ci-après ne requièrent pas leur utilisation. On remarquera aussi que l'extraction de ces rayons nécessite une intégration numérique des valeurs extraites de la CFD, sachant que les tourbillons de DHCR sont convectés dans un écoulement cisailé. Le rayon visqueux permet une extraction rapide et robuste des résultats issus d'un calcul CFD et est utilisé de manière classique dans les extractions des calculs DHCR [32, 160].

Familles de tourbillons

Tourbillons 2D Une famille de solutions du système d'éqs. (2.2) a été trouvée par Neufville [110]. Pour l'obtenir, il utilise les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \tau = \nu t, \\ \eta = r^2/4\tau. \end{cases} \quad (2.13)$$

Plutôt que d'étudier la vitesse tourbillonnaire, on étudie la vorticité. Dans ce but, une équation de la conservation de la vorticité est déduite de la conservation de la quantité de mouvement. Dans un écoulement 2D, la vorticité en coordonnées cylindriques (r, θ) s'écrit $r\omega_z = \partial r u_\theta / \partial r$ et l'équation de conservation de la quantité de vorticité axiale s'écrit [167] :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right). \quad (2.14)$$

On remarque que cette équation s'obtient en prenant le rotationnel de la 2^{ème} équation du système d'équations (2.2). En combinant les eqs. (2.13) et (2.14), on obtient alors :

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial^2 \eta} + (\eta + 1) \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} = 0. \quad (2.15)$$

Une solution générale pour cette équation différentielle du 2^{ème} ordre existe. Elle utilise les polynômes de Laguerre définis par :

$$L_n(\eta) = e^\eta \frac{d^n}{d\eta^n} \left(\frac{\eta^n}{e^\eta} \right). \quad (2.16)$$

En utilisant une procédure récursive, une famille de solutions peut être obtenue. La vitesse tangentielle et la vorticité axiale sont [26] :

$$\begin{aligned} \omega_z(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \tau^{-(n+1)} \exp(-\eta) L_n(\eta), \\ u_\theta(r, t) &= \frac{2C_0}{\sqrt{\eta\tau}} (1 - \exp(-\eta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C_n \tau^{-n}}{\sqrt{\eta\tau}} \exp(\eta) (L_{n-1}(\eta) - L_n(\eta)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

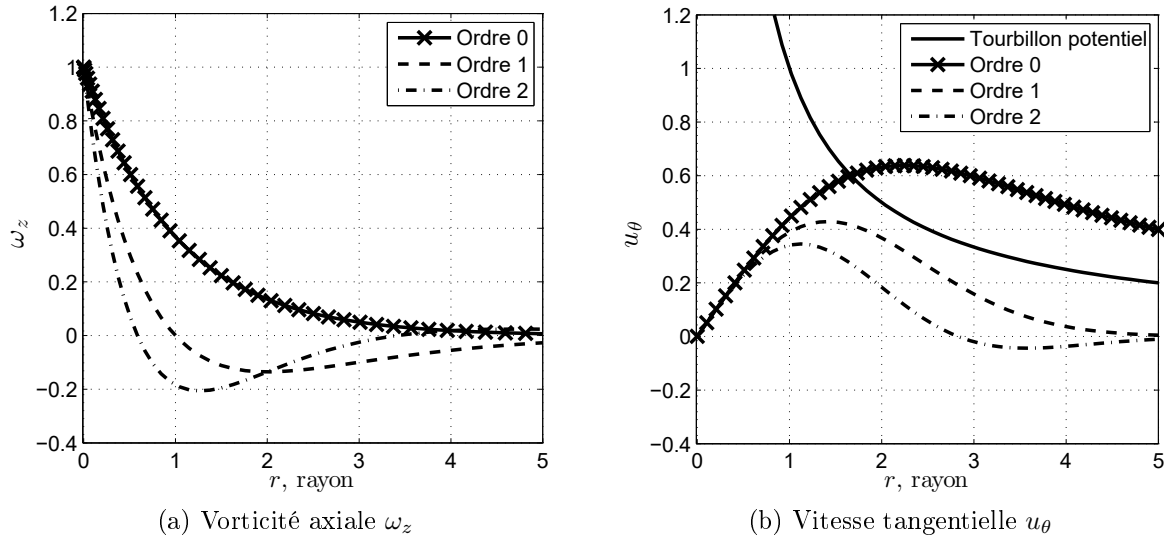


Figure 2.1 Solutions de Laguerre pour quelques premiers ordres avec $C_m = \tau = 1$

Le comportement des modes $L_n(\eta)$ et les coefficients C_n sont obtenus par application des conditions aux limites. Les polynômes de Laguerre étant orthogonaux entre eux, les C_n peuvent être trouvés en utilisant un produit scalaire. Cette méthodologie est similaire à ce qui est fait avec les coefficients de Fourier dans les problèmes ondulatoires.

Trois caractéristiques principales apparaissent dans la solution de Neufville présentée sur les figures 2.1a et 2.1b pour les premiers ordres. Tout d'abord, la vitesse tangentielle se comporte de manière linéaire pour $r \rightarrow 0$. Cela montre que les particules proches du centre de rotation se comportent approximativement comme un solide rigide en rotation. Ceci

est cohérent avec la définition du rayon visqueux et de l'exemple du tourbillon de Rankine présenté plus haut ainsi que de ce qui a pu être observé expérimentalement [157]. De la même manière, la séparation entre les régions *libre* et *forcée* du tourbillon est déterminée par la position du maximum de vitesse azimutale.

Ensuite, la solution de Neufville montre que seule la solution d'ordre 0 a une circulation totale non nulle. Les modes d'ordres supérieurs ont tous une décroissance de vitesse azimutale supérieure à $1/r$. Le corollaire sur la vorticité est que les tourbillons sans circulation totale ont nécessairement une zone où leur vorticité est négative.

Pour finir, on remarque la décroissance extrêmement lente de la vitesse azimutale du mode d'ordre zéro comparativement à celle des modes d'ordres supérieurs.

Dans le cas de systèmes aérodynamiques générant de la portance, la viscosité n'est pas le mécanisme principal d'enroulement. En effet, l'utilisation du théorème de Kutta-Joukowski dans le cas des tourbillons d'extrémités d'ailes montre qu'en réalité le tourbillon est créé par un enroulement de nappes de vorticité suivant un processus non visqueux [12]. La variation de circulation le long de l'envergure de l'aile donne directement la distribution de vorticité du tourbillon et *a fortiori* la distribution des vitesses tourbillonnaires. Moore et Saffman [104] ont proposé une famille de tourbillons à partir des solutions de Betz. Ils ont étudié le comportement d'un tourbillon engendré par la diffusion laminaire d'une ligne de vorticité dans un écoulement unidirectionnel. La distribution de circulation de la surface portante a la forme :

$$\Gamma(z_c^*) = (z_s^* - z_c^*)^{1-n}, \quad (2.18)$$

avec z_c^* l'envergure adimensionnée de l'aile, $n \in [0, 1]$ représentant la forme de la variation de chargement le long de l'envergure et z_s^* l'envergure adimensionnée de l'aile. $z_c^* = z_s^*$ correspond à l'extrémité de l'aile. En utilisant la conservation du moment d'inertie entre le tourbillon et l'aile, on obtient :

$$\underbrace{- \int_0^1 (z_s^* - z_c^*) \frac{\partial \Gamma}{\partial z_c^*} dz_c^*}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\int_0^{R_0} r^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial r} dr}_{\textcircled{2}}. \quad (2.19)$$

R_0 est un rayon suffisant pour englober toute la rotation induite par l'aile. Cette équation permet de modéliser le transfert de circulation qui arrive de l'aile ($\textcircled{1}$) produisant de la portance et le tourbillon généré ($\textcircled{2}$).

En négligeant les effets visqueux, la famille de tourbillons décrit par [104] donne :

$$u_\theta(r) = \frac{C_n}{r^n}, \quad (2.20)$$

avec C_n une constante, déterminée par la circulation totale du tourbillon et par les considérations dimensionnelles du tourbillon et de l'envergure l'aile. Les figures 2.2a et 2.2b illustrent le comportement de la vorticité et de la vitesse azimuthale pour quelques exposants de la famille de Betz.

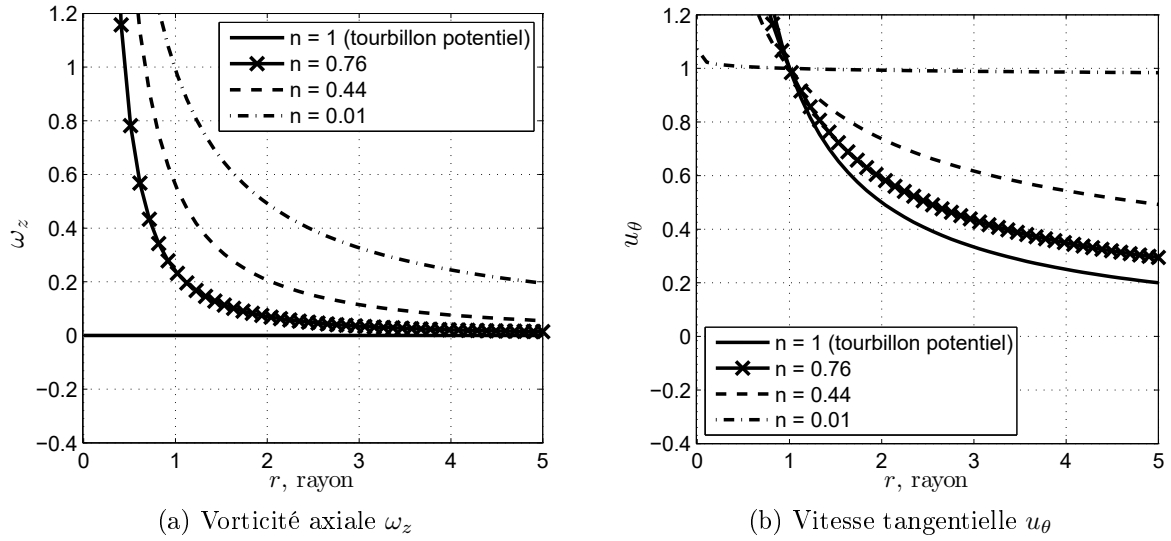


Figure 2.2 Modèle de Betz pour quelques premiers ordres.

On remarque premièrement que la vitesse tangentielle diverge en $r = 0$. Certaines corrections décrites par Kirde [82] reprennent le système d'éqs. (2.2) avec des considérations de couche limite laminaire, une vitesse axiale finie près des parois et une vitesse azimuthale nulle à la paroi ($u_\theta(0) = 0$). On obtient alors un comportement visqueux avec les mêmes similarités que la solution de Neufville, avec un comportement linéaire dans le cœur du tourbillon.

On remarque encore une fois qu'à part le cas critique $n = 1$ où la vorticité est nulle (écoulement potentiel), la circulation totale de ces tourbillons est infinie ce qui n'est pas en accord avec les expériences. Cela signifie qu'il faut introduire un rayon à partir duquel l'écoulement redevient potentiel.

En étudiant les instabilités numériques des tourbillons géophysiques, Carton et McWilliams [21] ont défini plusieurs familles de tourbillons et étudié leur stabilité numérique face à des perturbations hydrodynamiques. Deux critères permettent de distinguer 4 types de tour-

billons : la circulation totale (nulle ou constante) et la position du maximum de vorticité (au centre de la rotation ou non). Suivant les considérations étudiées avec les familles de Betz, le cas où la vorticité n'est pas maximale au centre du tourbillon n'existe pas dans le cas des tourbillons d'extrémité.

D'une part, les tourbillons avec circulation totale, aussi appelés *unshielded vortices*, se décrivent comme :

$$\omega_z(r) = \exp(-r^n), \quad (2.21)$$

pour $n \in \mathbb{N}$. La vitesse induite n'a pas de forme générique $\forall n \in \mathbb{N}$. Cependant la vitesse azimutale induite peut être calculée exactement pour les 3 premiers ordres :

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \frac{1 - (1+r)\exp(-r)}{r} & , n = 1 \\ \frac{1 - \exp(-r^2)}{2r} & , n = 2 \\ \frac{\Gamma(2/3) - r^2 E_{1/3}(r^3)}{3r} & , n = 3 \end{cases} \quad (2.22)$$

avec $E_n(X)$ la fonction exponentielle intégrale et $\Gamma(x)$ la fonction gamma complète définies dans Abramowitz et Stegun [1].

La figure 2.3 présente quelques résultats pour les tourbillons de Carton-McWilliams. La vitesse présente un maximum puis décroît comme $1/r$, ce qui indique un tourbillon avec circulation totale constante. On remarque aussi que la croissance de vitesse proche du cœur du tourbillon est linéaire comme pour la famille de tourbillons de Laguerre.

Les tourbillons sans circulation totale, aussi appelés *shielded vortices*, sont décrits par :

$$\omega_z(r) = \left(1 - \frac{nr^n}{2}\right) \exp(-r^n), \quad (2.23)$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Cette fois-ci, la vitesse induite a une solution exacte, obtenue par intégrations par parties successives :

$$u_\theta(r) = \frac{r^2}{2} \exp(-r^n). \quad (2.24)$$

La figure 2.4 montre bien le comportement des tourbillons sans circulation totale décrit par les solutions de Neufville, à savoir la rapide décroissance de la vitesse azimutale ac-

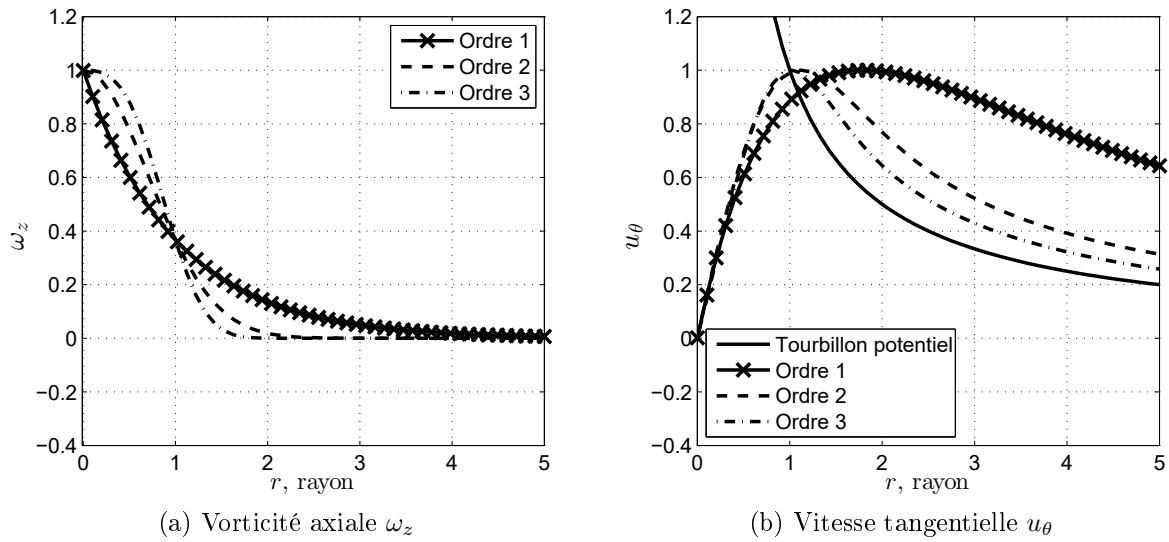


Figure 2.3 Modèle de Carton-McWilliams avec circulation pour quelques premiers ordres.

compagnée par une zone de vorticité négative arrivant juste après le maximum de vitesse azimuthale. Ce comportement est à rapprocher des solutions de Neufville décrites peu avant.

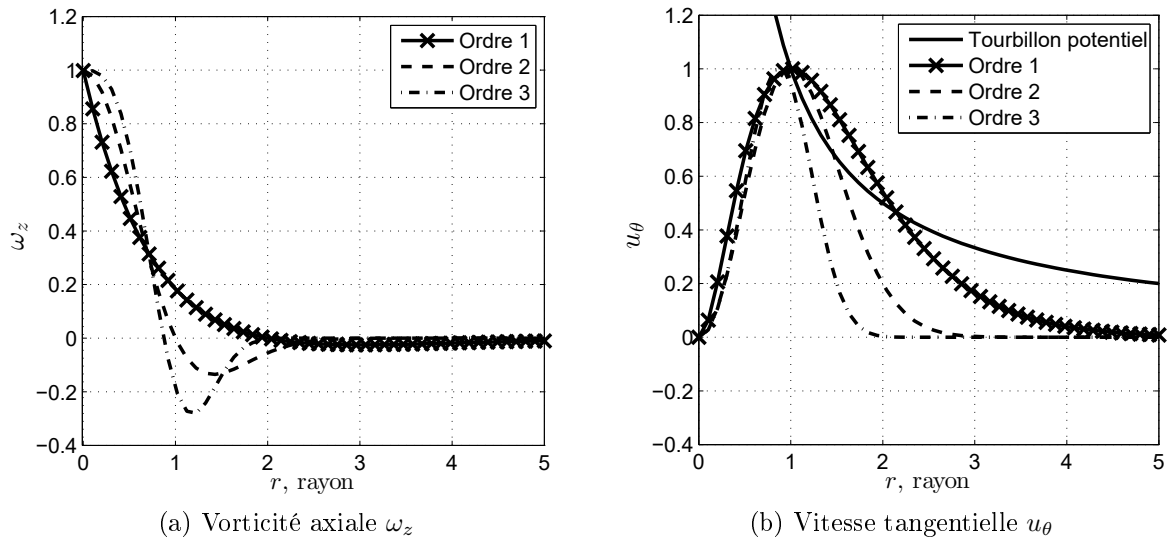


Figure 2.4 Modèle de Carton-McWilliams sans circulation pour quelques premiers ordres.

Tourbillons 3D Moore et Saffman [104] obtiennent le comportement tridimensionnel d'un tourbillon en utilisant une version modifiée de la solution de Betz pour la vitesse

azimutale u_θ afin de prendre en compte la viscosité et le temps :

$$u_\theta(r, t) = \frac{C_n}{(\nu t)^{n/2}} \left(2^{-n} \Gamma \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}n \right) \right) \sqrt{\frac{r^2}{4\nu t}} M \left(\frac{1}{2}(1+n), 2, -\frac{r^2}{4\nu t} \right), \quad (2.25)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma et $M(a, b, z)$ est la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce. Ils s'intéressent au comportement de la vitesse axiale du tourbillon u_z lorsque le tourbillon est convecté à une vitesse constante U_z largement supérieure à u_z . Ils obtiennent une expression asymptotique de u_z dont le signe change suivant l'exposant n du chargement lorsque le tourbillon est créé (*i.e* pour $\eta = r^2/(4\nu t) = 0$). u_z s'écrit :

$$u_z(r, t) = \frac{C_n^2}{U_z(\nu t)^n} W_n \left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right), \quad (2.26)$$

avec $W_n(0)$ la fonction reproduite sur la figure 2.5. Si $n < 0,44$, le modèle décrit par Moore et Saffman [104] prédit un excès de vitesse qui a été confirmé expérimentalement pour des écoulements coniques où n est proche de zéro. En revanche, lorsque $n > 0,44$ l'écoulement axial est nécessairement un déficit de vitesse, ce qui correspond à la plupart des expériences et simulations de DHCR [29, 32, 148, 156].

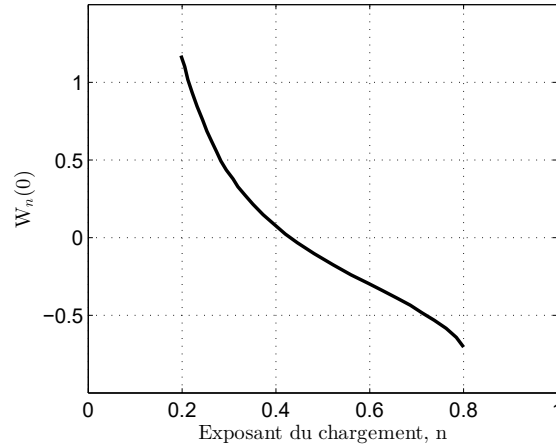


Figure 2.5 Fonction $W_n(0)$ obtenue par Moore et Saffman [104].

En conclusion, dans cette partie nous avons décrit tous les outils nécessaires pour décrire un écoulement tourbillonnaire. À partir de modèles simples, nous avons tiré des grandeurs caractéristiques propres aux tourbillons. De plus, à partir de considérations physiques différentes nous avons pu mettre en évidence trois familles de tourbillons, l'une basée sur la viscosité, l'autre sur l'enroulement de nappes de vorticité et une dernière sur l'expérience accumulée des tourbillons géophysiques. Les trois approches seront nécessaires pour la description d'une vitesse induite réaliste lors de l'extraction depuis un calcul DHCR nu-

mérique. Les considérations de circulation totale permettent d'observer différents profils de vorticité et *a fortiori* la vitesse azimutale induite.

2.2.3 Modélisation des vitesses tourbillonnaires

À partir des familles de tourbillons, différentes modélisations des vitesses tourbillonnaires ont été établies dans la littérature. Puisque le tourbillon d'extrémité d'une pale de DHCR dépend de la variation de chargement le long du rayon [12], différents modèles seront présentés.

Les modèles bidimensionnels seront d'abord examinés. Ces modèles sont la base du modèle OBVI même s'ils ne prennent pas en compte le déficit de vitesse axiale créé par viscosité au niveau du saumon de la pale. Pour la suite du développement, la modélisation doit être robuste, précise et simple analytiquement. Il faudra donc vérifier la qualité du modèle choisi.

Par ailleurs, les expériences [155, 156] et les simulations numériques relatives aux DHCR [32, 140] montrent que le maximum de vitesse axiale lié au tourbillon est du même ordre de grandeur que le maximum de vitesse azimutale. Par conséquent dans un deuxième temps une modélisation 3D de l'écoulement tournant sera proposée.

Modèles 2D

Tourbillon de Lamb-Oseen La vitesse azimutale du tourbillon décrit par Oseen [113] est le mode 0 des solutions de Laguerre décrites précédemment (éq. 2.17) :

$$u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right], \quad (2.27)$$

avec Γ la circulation totale. L'écriture du tourbillon de Lamb-Oseen suppose que l'écoulement est instationnaire. Mais dans la littérature, on retrouve la version permanente de ce vortex [44]. Dans ce cas, le tourbillon ne dépend plus du temps et le rayon visqueux du tourbillon est constant. Celui-ci s'écrit classiquement r_0 et le tourbillon de Lamb-Oseen permanent s'écrit :

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{r_0^2}\right) \right], \quad (2.28)$$

avec $\alpha \approx 1,26$ un coefficient choisi dans le but d'avoir le maximum de vitesse azimutale en $r = r_0$. Ce tourbillon décrit un écoulement à circulation totale constante. Il est l'un des plus utilisés dans la dynamique tourbillonnaire. Il est continu et dérivable. Si l'on prend l'exemple de la vorticité axiale, celle-ci vaut :

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (2.29)$$

pour un tourbillon instationnaire et :

$$\omega_z(r) = \frac{\Gamma}{\alpha\pi r_0^2} \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (2.30)$$

pour son équivalent stationnaire. Ce tourbillon a par exemple été utilisé pour caractériser le flottement tourbillonnaire [43] ou pour des corrections analytiques compressibles aux écoulements 2D [26]. Les nombres de Mach associés aux écoulements DHCR sont assez hauts pour prendre en compte les effets de compressibilité. Cependant, ce modèle utilise les solutions proposées par Neufville [110] pour la vitesse tangentielle. La compressibilité de l'écoulement provoque un écoulement radial dont l'amplitude maximale est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds de l'écoulement qui est de l'ordre de 10^7 pour les DHCR. En conclusion, l'étude de Colonius *et al.* [26] indique que les effets de compressibilité sur le tourbillon marginal seront négligeables, d'une part, et d'autre part, il indique que l'ordre de grandeur de la vitesse radiale devrait être négligeable comparé à la vitesse azimutale.

Tourbillon de Taylor Ce tourbillon provient de l'étude des tourbillons turbulents isolés dans un écoulement visqueux par Taylor [153]. Les tourbillons sont à circulation totale nulle et leur expression provient des écoulements potentiels. La vitesse azimutale s'écrit :

$$u_\theta(r, t) = \frac{Ar}{2\nu t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right), \quad (2.31)$$

avec la vorticité axiale associée :

$$\omega_z(r, t) = \frac{A}{\nu t^2} \left[1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right). \quad (2.32)$$

Si l'écoulement est permanent, on obtient alors :

$$\begin{aligned} u_\theta(r) &= \frac{Br}{2r_0} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right) \\ \omega_z(r) &= \frac{B}{r_0} \left[1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

De cette manière, le maximum de vitesse azimutale se situe en $r = r_0$. On remarque aussi que le tourbillon de Taylor est l'équivalent d'un tourbillon de Carton-McWilliams (CMW) sans circulation totale pour $n = 2$ (équation 2.24).

Tourbillon de Scully Ce modèle a été utilisé pour étudier l'influence des tourbillons d'extrémité de pales d'hélicoptères sur le chargement instationnaire des pales adjacentes [137]. Il est empirique, basé sur les résultats de profils d'envergure finie d'allongement élevé (4,2 - 6) et à saumon rectangulaire. Le profil de vitesse est algébrique, en adéquation avec les considérations présentées par Betz [12].

La vitesse azimutale et la vorticité associée s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_\theta(r) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + r_0^2} \\ \omega_z(r) &= \frac{\Gamma}{\pi} \frac{r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Tourbillon multi-échelles Après avoir obtenu des résultats plus précis sur des expériences de tourbillons d'extrémités d'ailes d'avions, Fabre [43] a proposé un modèle de tourbillon à deux échelles. Ce modèle se base sur les considérations zonales d'un tourbillon créé par enroulement des nappes de vorticité. On considère alors que le tourbillon a 3 régions différentes.

La première est une région visqueuse où la vitesse azimutale croît linéairement. Cette zone est alors délimitée par un premier rayon r_0 qui se trouve être le rayon visqueux.

Dans la deuxième partie du tourbillon se trouve la zone de décroissance de la circulation. Dans cette zone, la vitesse azimutale décroît, mais le taux de décroissance de la vitesse est tel que la circulation continue d'augmenter (*i.e* : $u_\theta(r) = 1/r^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$).

Cependant, lorsque 99% de la circulation totale du tourbillon est atteinte, on suppose que l'écoulement redevient potentiel et que la circulation devient constante. On note r_Γ le rayon où l'écoulement redevient potentiel. Le tourbillon à deux échelles donne alors pour

la vitesse azimutale :

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \Omega_0 r & \forall r \in]0, r_0[\\ \Omega_0 r_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha & \forall r \in [r_0, r_\Gamma[\\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & \forall r \in [r_\Gamma, +\infty[\end{cases} \quad (2.35)$$

avec les distributions de vorticité associées :

$$\omega_z(r) = \begin{cases} 2\Omega_0 & \forall r \in]0, r_0[\\ \Omega_0 r_0^{1+\alpha} (1-\alpha) r^{-(\alpha+1)} & \forall r \in [r_0, r_\Gamma[\\ 0 & \forall r \in [r_\Gamma, +\infty[\end{cases} \quad (2.36)$$

Le problème avec ce type de formulation provient des discontinuités. Une version régularisée du tourbillon est alors donnée par :

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_0 r}{[1 + (r/r_0)^4]^{(1+\alpha)/4} [1 + (r/r_\Gamma)^4]^{(1-\alpha)/4}} \\ \omega_z(r) = \frac{(r^4/r_0^4 + 1)^{-\alpha/4} (r^4/r_\Gamma^4 + 1)^{\alpha/4} (2r_0^4 r_\Gamma^4 + r_0^4 \alpha r^4 + r_0^4 r^4 - \alpha r_\Gamma^4 r^4 + r_\Gamma^4 r^4)}{(r_0^4 + r^4)^{4\sqrt{(r_0^4 + r^4)/r_0^4}} (r_\Gamma^4 + r^4)^{4\sqrt{(r_\Gamma^4 + r^4)/r_\Gamma^4}}} \cdot \quad (2.37)$$

ω_z pour ce type de tourbillon est calculable, mais en pratique complexe d'utilisation. Ses propriétés restent identiques à la formule non régularisée.

Lors d'expériences sur des pales de DHCR, il s'est avéré que le tourbillon marginal présentait deux régimes de croissance de la vitesse azimutale entre le centre du tourbillon et le maximum de vitesse. Vion [160] a montré que rajouter une nouvelle région par l'intermédiaire d'un nouveau rayon de dispersion permettait d'obtenir un profil de vitesse similaire aux expériences. La vitesse azimutale s'écrit donc :

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \Omega_0 r & \forall r \in]0, r_0[\\ \Omega_0 r_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha_2} & \forall r \in [r_0, r_1[\\ \frac{\Gamma}{2\pi r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha & \forall r \in [r_1, r_\Gamma[\\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & \forall r \in [r_\Gamma, +\infty[\end{cases} \quad (2.38)$$

où $\alpha_2 \in [-1, 0[$ est un second coefficient permettant de reproduire la variation de vitesse azimutale extraite des expériences. Cette dynamique à deux rayons provient de l'influence de la vorticité opposée à l'enroulement des nappes de vorticité provoqué par la variation

de chargement de la surface portante. Cet effet est obtenu quand la position du centre du tourbillon est corrigée par le flottement du centre tourbillonnaire. Dans le cas contraire, un modèle de type Lamb-Oseen convient parfaitement aux valeurs extraites.

À partir des résultats URANS, ces effets d'instabilités n'apparaîtront pas. Ainsi le modèle à trois échelles semble être inapproprié dans notre cas en plus d'être mathématiquement complexe à manipuler.

Modèles 3D

Q-vortex Le premier tourbillon 3D que l'on peut décrire est développé à partir du travail de Batchelor [10].

On suppose un tourbillon axisymétrique qui évolue dans un écoulement axial moyen (U_z) porteur de petites fluctuations de vitesse axiale (u_z). De plus, on suppose que les fluctuations axiales sont négligeables devant les fluctuations radiales de la vitesse (écoulement quasi-2D). Pour finir, avec un tourbillon de Lamb-Oseen (équ. (2.28)) pour la composante azimutale de la vitesse, une solution autosimilaire pour la vitesse axiale existe :

$$u_z(r, z) = U_z - \frac{\Gamma^2}{8\nu z} \log\left(\frac{zU_z}{\nu}\right) Q_1(\eta) + \frac{\Gamma^2}{8\nu z} Q_2(\eta) - L \frac{U_z^2}{8\nu z} \exp(-\eta), \quad (2.39)$$

avec :

$$\begin{cases} Q_1(\eta) = \exp(-\eta) \\ Q_2(\eta) = \exp(-\eta) [\log \eta - E_1(\eta) - 0,807] - 2E_1(\eta) + 2E_1(2\eta) \end{cases}, \quad (2.40)$$

L est une constante à déterminer et Γ la circulation du tourbillon. $E_1(x)$ est l'exponentielle intégrale définie en équ.(5.1.1) p288 [1].

Grâce à l'écoulement axial moyen, le paramètre η de l'éq. (2.13) s'écrit alors :

$$\eta = \frac{r^2}{4\nu t} = \frac{U_z r^2}{4\nu z}. \quad (2.41)$$

La partie de l'équation liée à Γ est décorrélée de la partie liée à L . Le comportement de la vitesse axiale provient donc de deux mécanismes différents. Le premier décrit la vitesse axiale comme une diffusion de la vitesse azimutale. C'est un transfert de quantité de mouvement. Le deuxième est lié à la traînée de la pale. Il vient du comportement de la couche limite au niveau de la création du tourbillon. Le Q-vortex s'obtient en négligeant la diffusion axiale de la vitesse azimutale. On considère alors que la vitesse axiale est

purement liée à la traînée de la pale [111] :

$$u_z(r, z) = U_z - L \frac{U_z^2}{8\nu z} \exp(-\eta). \quad (2.42)$$

Ce modèle de tourbillon 3D a montré de bons résultats en comparant avec des extractions de tourbillons d'extrémités d'ailes d'avions [111], mais également pour des extractions de tourbillons de DHCR [32].

Tourbillon de Vatistas En utilisant une formulation empirique pour la vitesse azimutale, Vatistas *et al.* [158] ont développé des modèles 3D de tourbillons. L'hypothèse fondatrice consiste à supposer que la vitesse azimutale se comporte selon l'expression :

$$u_\theta(r) = u_\theta^{max} \frac{\bar{r}}{(1 + \bar{r}^{2n})^{1/n}}, \quad (2.43)$$

avec u_θ^{max} le maximum de vitesse azimutale à atteindre, n un entier non nul indiquant la rapidité de décroissance de la vitesse, $\bar{r} = r/r_0$ le rayon adimensionné par le rayon visqueux du tourbillon r_0 .

La vorticité axiale induite par une telle distribution de vitesse est :

$$\omega_z(r) = \frac{2u_\theta^{max}}{r_0} (1 + \bar{r}^{2n})^{-\frac{n+1}{n}}. \quad (2.44)$$

En utilisant la vitesse azimutale, la composante radiale de la vitesse peut être obtenue grâce à la conservation de la quantité de mouvement azimutale en supposant que l'écoulement est quasi-2D :

$$u_r(r) = -u_r^{max} 2(1 + n) \frac{\bar{r}^{2n-1}}{1 + \bar{r}^{2n}}, \quad (2.45)$$

et la vitesse axiale est obtenue en considérant la continuité de l'écoulement et l'expression de la vitesse radiale présentée à l'équation précédente :

$$u_z(r, z) = -u_z^{max} \frac{r_0}{z} \frac{4n(1 + n)\bar{r}^{2(n-1)}}{(1 + \bar{r}^{2n})^2}, \quad (2.46)$$

où u_r^{max} et u_z^{max} sont respectivement les maximums de vitesse à atteindre dans les directions radiale et axiale. Ce modèle est basé sur des fonctions rationnelles et par conséquent considère les remarques faites par Betz.

Tous les tourbillons de Vatistas sont avec circulation totale constante puisque le dénominateur de la vorticité axiale est toujours positif. On remarque que la vitesse azimutale est modélisée de telle manière que le profil de vitesse azimutale soit similaire à un tourbillon de Rankine pour $n \rightarrow \infty$.

On observe aussi la dépendance en $1/z$ de la vitesse axiale, ce qui est en accord avec la partie diffusive du Q-vortex.

Pour finir, on remarque qu'un tourbillon de Vatistas pour $n = 1$ est équivalent à un tourbillon de Scully.

Tourbillon de Fukumoto Une approche complètement différente peut être proposée en partant du comportement d'une ligne de vorticité hélicoïdale respectant les équations d'Euler [53, 69]. La vitesse induite par la ligne de vorticité s'obtient alors en utilisant la loi de Biot-Savart appliquée à l'hydrodynamique. Celle-ci s'applique sur une boucle fermée où des solutions exactes existent [167].

Cependant, lorsque la ligne de vorticité est hélicoïdale une approximation est faite au travers des fonctions cylindriques modifiées, les séries de Kapteyn :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n} \{(\nu+n)z\} \quad \text{avec } \nu \text{ et } a_n \in [\mathbb{N} \otimes \mathbb{Z}^n]. \quad (2.47)$$

Considérons une ligne de vorticité hélicoïdale dont la circulation normale à la trajectoire est constante et est notée Γ . Le pas de l'hélice est $2\pi l$ et le rayon de la trajectoire est a . La trajectoire de cette ligne de vorticité est décrite par :

$$\mathbf{X}_v = (l\Phi, a \sin \Phi, a \cos \Phi), \quad (2.48)$$

dans un référentiel cartésien $\mathfrak{R}_{0,car}$ avec $\Phi = \text{atan}(Y/Z)$ l'angle polaire d'un référentiel cylindrique $\mathfrak{R}_{0,cyl}$. Sur cette hélice, une distribution de vorticité est injectée de manière toujours tangente à la trajectoire de l'hélice \mathbf{X}_v . On décrit alors la vitesse induite par cette distribution hélicoïdale de vorticité.

Le champ de vitesse obtenu ne comprend ni l'influence de la viscosité ni l'influence de la turbulence sur la diffusion. Cependant, l'influence de la trajectoire de la ligne de vorticité ainsi que l'influence de lignes de vorticité adjacentes sont prises en compte. En effet, si le rapport $h = 2\pi l/a$ devient petit (  lice serrée), on observe sur une coupe à X constant que les vitesses induites ne sont pas celles d'un tourbillon isolé. Les trajectoires des particules cessent d'être des cercles pour devenir des croissants. Plus h augmente, plus le croissant est allongé dans la direction \mathbf{e}_Φ . Lors des extractions sur des DHCR on appréciera la valeur du paramètre h pour savoir si l'on peut considérer un tourbillon comme localement rectiligne.

Le tourbillon de Fukumoto et Okulov [53] a été utilisé par Kingan et Self [81] pour des pales DHCR. Sur les émissions sonores une augmentation de 5 à 10 dB par rapport à un modèle 2D du tourbillon (vitesse azimutale uniquement basée sur le modèle de Majjigi *et al.* [96]) a été constatée. Cette augmentation provient uniquement de la trajectoire hélicoïdale du tourbillon ; cette dernière devra donc être prise en compte précisément si le paramètre h est élevé.

2.2.4 Détection de la trajectoire d'un tourbillon

Dans le cadre des DHCR, le tourbillon est convecté depuis l'extrémité de la pale amont jusqu'à son impact potentiel sur la pale aval. Or les équations décrites dans les parties précédentes sont en coordonnées cylindriques centrées sur le centre de rotation du tourbillon. La prochaine étape est de détecter la position de ce centre tourbillonnaire pour un DHCR dans le but d'extraire les vitesses tourbillonnaires dans le repère particulier lié au tourbillon.

Détecter un tourbillon de manière précise et efficace n'est pas trivial. Par ailleurs, il n'existe pas de méthode unique pour identifier des tourbillons dans un calcul CFD. Il est souvent requis d'avoir une connaissance *a priori* du comportement d'un écoulement avant de pouvoir identifier un tourbillon de manière certaine, surtout si les critères retenus détectent des tourbillons qui n'existent pas [149].

Jeong et Hussain [76] donnent une liste exhaustive des méthodes de détection pour les tourbillons. Les méthodes testées sont décomposables en deux grandes catégories : celles qui utilisent directement les grandeurs aérodynamiques et celles qui utilisent les propriétés du tenseur gradient de vitesse. D'autres méthodologies utilisant les lignes de courants [120] et la topologie combinatoire [120] ne seront pas présentées dans ce travail.

Méthodes utilisant les variables aérodynamiques

On peut d'abord utiliser des extrema des variables aérodynamiques pour localiser des tourbillons. Les variables utilisées sont $(\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), p)$ dans un repère cartésien usuel ou dans le repère cylindrique associé $(\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z), p)$.

La méthode du minimum de pression est basée sur le fait que lors d'un enroulement tourbillonnaire, une baisse de pression totale locale apparaît. Cette constatation provient de l'équation de l'équilibre radial pour un écoulement incompressible, 2D axisymétrique, stationnaire (éq. (2.2)). Au centre d'un tourbillon, la vitesse de rotation s'annule : $u_\theta = 0$. Cela implique un extremum de pression selon $\partial p / \partial r = 0$. Or, puisque r et ρ_0 sont toujours positifs, le gradient de pression en dehors du centre de rotation est positif. La pression ne peut que croître. Cela indique que le centre est un minimum de pression.

Dans le cas d'un écoulement turbulent sur une plaque plane [125], le minimum de pression détecte les grandes structures de l'écoulement, mais n'arrive pas à localiser les tourbillons dits *hairpins* caractéristiques de ce type d'écoulement.

En pratique, Banks et Singer [9] utilisent la méthode du minimum de pression couplée à une évaluation de la norme de la vorticité pour détecter la trajectoire du centre du tourbillon. Le maximum de vorticité prédit la position de ce centre, puis la pression corrige la position prédite.

Dans le cas d'un écoulement compressible, l'argument du minimum de pression n'est plus valable mathématiquement. Cependant, il s'avère toujours pertinent pour certains types d'écoulement [125]. On pourra alors, grâce à l'équation d'état, utiliser le minimum de masse volumique pour détecter les centres tourbillonnaires.

Méthodes utilisant le tenseur gradient de vitesse

Le tenseur gradient de vitesse \mathbf{J} permet de déterminer les contraintes de cisaillement d'un fluide réel, mais il donne aussi une indication sur le comportement local d'un fluide. Une des propriétés de \mathbf{J} se situe dans l'étude de ses valeurs et vecteurs propres. En effet, les valeurs propres de \mathbf{J} peuvent être imaginaires si elles sont liées à la rotation de l'écoulement [22]. La détection d'un tourbillon ne doit pas changer si une vitesse uniforme est ajoutée ou si l'on considère un référentiel différent. Or les valeurs propres de \mathbf{J} sont des invariants galiléens.

Un cas simple de matrice 2D à valeurs propres imaginaires serait de la forme :

$$\mathbf{M}_{\lambda_{ima}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

avec $a \in \mathbb{R}$. Cette matrice antisymétrique est directement liée à la rotation d'une particule fluide. En effet \mathbf{J} peut se décomposer en deux matrices, une symétrique \mathbf{S} et une antisymétrique $\mathbf{\Omega}$ en utilisant les relations :

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{J} + \mathbf{J}^t}{2}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{J} - \mathbf{J}^t}{2}, \quad (2.50)$$

l'exposant t indiquant l'opération de transposée. La matrice $\mathbf{\Omega}$ est directement liée à la vorticité du champ de vitesse $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ par les relations suivantes :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Si le tenseur gradient de vitesse a des valeurs propres imaginaires, cela signifie que la matrice $\mathbf{\Omega}$ est dominante. Donc localement, l'écoulement est rotationnel.

Le critère λ_2 , développé par Strawn *et al.* [147], étudie la deuxième valeur propre de la matrice $\mathbf{\Omega}^2 + \mathbf{S}^2$. La première valeur propre est liée à la direction de la rotation et si la valeur propre est négative alors elle est liée aux valeurs propres imaginaires de \mathbf{J} . La méthode λ_2 peut alors être utile pour détecter à la fois la position du centre tourbillonnaire et le repère privilégié du tourbillon. C'est dans ce repère que s'appliquent les modèles décrits dans la partie précédente.

Une méthode différente, simple d'implémentation est de regarder un extremum de la norme du vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Cette méthode fonctionne pour des écoulements éloignés des parois. En effet, dans la couche limite, les valeurs de la vorticité sont élevées (fort gradient de vitesse dans une direction), mais ils n'indiquent pas un tourbillon. Des difficultés pourraient apparaître pour le tourbillon en fer à cheval surtout si ce dernier est convecté dans la couche limite turbulente.

Une manière de prendre en compte le cisaillement dans la détection intervient dans le critère Q . Ce critère scalaire utilise les matrices $\mathbf{\Omega}$ et \mathbf{S} dans le but de distinguer les

régions cisailées des régions tournantes. Il s'écrit [125] :

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}), \quad (2.52)$$

où $X_{ij}X_{ij}$ représente la somme de tous les éléments de la matrice au carré suivant la convention d'Einstein. Pour la partie antisymétrique, on peut travailler avec la norme de la vorticité de manière équivalente ($\Omega_{ij}\Omega_{ij} = 2|\boldsymbol{\omega}|^2$). Dans le cas du tourbillon de tête, vu qu'il n'y a pas de gradient de vitesse lié à la présence d'une couche limite, le critère Q et la norme de la vorticité sont équivalents.

Les méthodes utilisant \mathbf{J} sont toutes équivalentes physiquement puisque toutes reliées à la vorticité. Elles ont prouvé leur efficacité dans de nombreux écoulements surtout quand il n'existe pas de couche limite. On pourra donc raisonnablement les utiliser pour détecter le tourbillon d'extrémité et apprécier des méthodes plus simples comme celle du minimum de pression ou dans le cas compressible du minimum de masse volumique.

2.2.5 Diffusion du tourbillon

Le long de la trajectoire détectée, les vitesses tourbillonnaires vont être diffusées. Cet effet de dispersion apparaissait explicitement pour les modèles de tourbillon visqueux proposés par Neufville [110]. En revanche ces modèles supposent que les tourbillons se diffusent grâce à la viscosité laminaire. Pour la prédiction des tourbillons à l'extrémité des ailes d'avion, il s'avère que l'utilisation de la viscosité laminaire sous-prédit la diffusion des tourbillons pour des nombres de Reynolds  lev s [165]. En effet, le tourbillon est convecté dans un écoulement turbulent. L'énergie cinétique du tourbillon marginal est alors redistribuée à des échelles plus petites où elle sera dissipée. Macroscopiquement, le tourbillon est donc aussi dissipé par la turbulence.

Il s'avère par ailleurs que cette diffusion est plus adéquatement prédite par des modèles stochastiques [144]. Ceux-ci se basent sur le raisonnement suivant. Un tourbillon est une structure fluide cohérente (définition de Lugt [95]). Or les structures cohérentes admettent des modes de vibration. La turbulence vient alors exciter les modes du tourbillon. Or il s'avère que certains de ces modes sont instables. L'excitation d'un mode instable détruit la cohérence du tourbillon. Pour plus de détails sur les modes d'un tourbillon cohérent et leurs stabilités, le lecteur est invité à lire le travail de Fabre [43].

Si le tourbillon est extrait d'une simulation (U)RANS, la méthode de diffusion préconisée fait intervenir la viscosité puisque seul le comportement moyen de la turbulence est

modélisé. Cette viscosité est modifiée par la turbulence. L'idée d'intégrer une viscosité turbulente provient originellement du travail de Squire [145] et est reprise par Iversen [71]. La viscosité turbulente est alors proportionnelle à la circulation du tourbillon. La viscosité équivalente ν_e s'écrit alors :

$$\nu_e = \nu + \nu_t = \nu + a_\Gamma \Gamma, \quad (2.53)$$

où ν_t est la viscosité turbulente et a_Γ est une constante empirique à déterminer. Un tourbillon turbulent de rayon visqueux r_0 et de circulation Γ_0 détecté en $t = 0$ évolue suivant les considérations de Neufville (éq. 2.13). Sa vitesse azimutale maximale u_θ^{max} et son rayon visqueux r évoluent donc au cours du temps :

$$r(t) = r_0 + \sqrt{4(\nu + \nu_t)t}, \quad u_\theta^{max}(t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r(t)}. \quad (2.54)$$

2.2.6 Application au cas FL05/AL05

Pour la configuration FL05/AL05 présentée dans l'annexe A, les fluctuations de vitesse liées au tourbillon sont extraites. Les résultats sont moyennés sur 1 passage de pale dans le repère du rotor amont en utilisant 75 solutions instantanées.

Pour faciliter le processus d'extraction, un bloc structuré (i, j, k) est utilisé pour la détection du tourbillon et l'extraction des vitesses tourbillonnaires. Les directions de ce bloc coïncident avec les coordonnées cylindriques.

La direction i correspond à la direction axiale \mathbf{e}_X , soit l'axe de rotation du DHCR. Celui-ci pointe de l'amont vers l'aval. La direction j pointe suivant la direction angulaire \mathbf{e}_Φ et enfin k pointe vers la direction radiale \mathbf{e}_R .

La surface d'extraction $i = 1$ suit la variation axiale du bord de fuite du rotor amont. La surface d'extraction $i = i_{max}$ suit le bord d'attaque de la pale aval, ce qui permet d'extraire les fluctuations de vitesse au plus près de la surface des pales [73].

L'ouverture angulaire du bloc correspond à la périodicité du rotor amont $2\pi/B_1$ avec B_1 le nombre de pales du rotor amont. Le rayon minimal du bloc est choisi pour éviter la couche limite turbulente au niveau du moyeu. Le rayon maximal dépasse le rayon maximal du rotor amont d'au moins une corde. Le but est d'inclure le tourbillon marginal de manière complète.

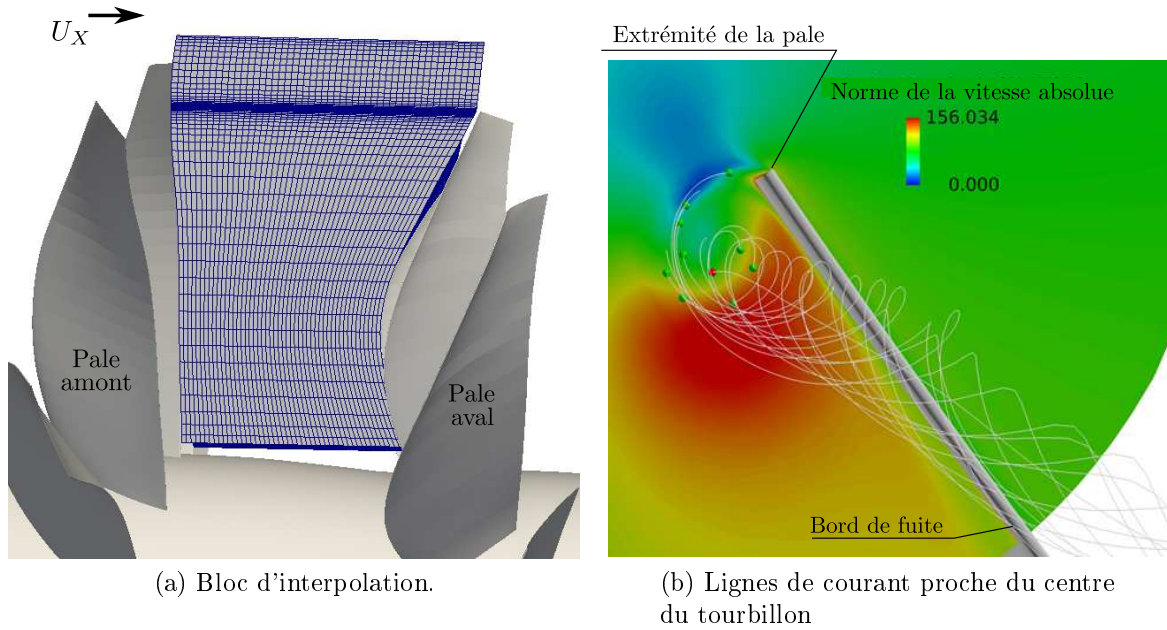


Figure 2.6 Extractions nécessaires pour reconstruire la cinématique du tourbillon.

Depuis le bloc d'extraction présenté sur la figure 2.6a, on utilise différentes méthodes d'extraction pour la trajectoire du centre du tourbillon \mathbf{X}_v . On applique successivement la détection sur des surfaces à indice i fixé. La trajectoire est recomposée en assemblant les points détectés sur chacune des surfaces.

Pour valider la méthode de détection, une ligne de courant particulière est extraite des résultats URANS. Cette ligne de courant démarre dans la zone de haute vorticité au niveau du bord de fuite de la pale amont et près de son extrémité (figure 2.6b). Cette ligne de courant (la ligne démarrant de la sphère rouge) est celle autour de laquelle d'autres lignes de courant s'enroulent (celles qui démarrant des sphères vertes). La ligne de courant rouge est extraite *  priori* des résultats URANS. Les figures 2.7 présentent les extractions obtenues par les différentes méthodes en coordonnées cylindriques dans le repère $\mathfrak{R}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi)$.

On remarque que les extractions automatiques sont proches de la ligne de courant de validation. On remarque particulièrement que pour le tourbillon d'extrémité la méthode du minimum de masse volumique donne des résultats en adéquation avec les méthodes utilisant le critère Q et le maximum de vorticité. Ces deux dernières donnent d'ailleurs des résultats exactement identiques, ce qui est attendu de leurs définitions établies dans la partie précédente.

Puisque la trajectoire est proche d'une hélice, une approximation polynomiale d'ordre 1 est effectuée. Pour la position angulaire de la trajectoire, on a :

$$\Phi_v(X) = a_\Phi X + \Phi_{ini}, \quad (2.55)$$

avec a_Φ le pas de l'hélice de la trajectoire et Φ_{ini} la position angulaire initiale du tourbillon. Dans la configuration FL05/AL05, la valeur de l'hélicité $h = 2\pi/(a_\Phi R_v)$ vaut approximativement 3,2. Cela signifie que les fluctuations de vitesse sont significativement influencées par la trajectoire hélicoïdale du centre du tourbillon.

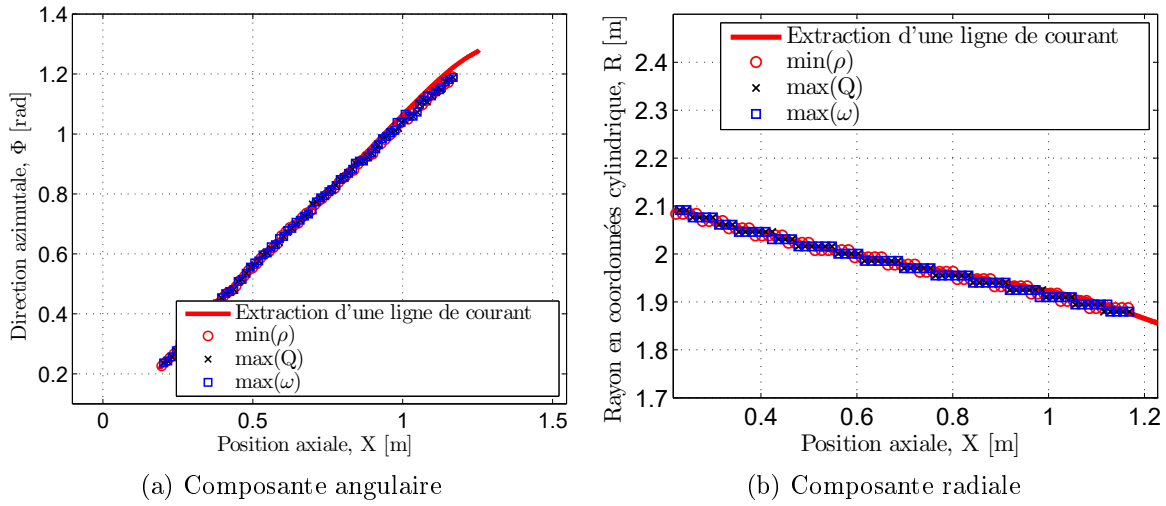


Figure 2.7 Composantes de la trajectoire du centre du tourbillon \mathbf{X}_v dans le repère global \mathfrak{R}_0 en utilisant plusieurs méthodes de détection.

La variation radiale de la trajectoire du tourbillon montre l'effet de la contraction du tube de courant engendré par la rotation des pales. Les lignes de courant, dont celle du centre du tourbillon, se contractent suivant la direction radiale. Cependant, le comportement radial de la trajectoire du centre du tourbillon pour des DHCR est différent des rotord simples [96]. Les extractions montrent un comportement quasi linéaire de la trajectoire du tourbillon. Ce comportement est attesté par différentes configurations calculées numériquement [17, 29] ou mesurées [156]. Pour cette raison, la variation radiale du tourbillon peut être restituée par une approximation polynomiale d'ordre 1 :

$$R_v(X) = a_R X + R_{ini}, \quad (2.56)$$

avec a_R un réel négatif lié à l'angle de contraction de la veine fluide (β). R_{ini} est le rayon initial de la trajectoire du tourbillon proche du rayon maximum de la pale amont. Le coefficient a_R est un paramètre qui dépend du point de fonctionnement du DHCR et de la géométrie [29].

La comparaison entre les extractions brutes et les approximations sont illustrées sur les figures 2.8a et 2.8b. Encore une fois, l'approximation polynomiale effectuée semble caractériser la trajectoire du centre du tourbillon. Quelques différences peuvent être vues aux extrémités axiales des extractions. Ces différences s'expliquent par des effets liés à la présence des pales (aspiration et effet potentiel de la pale aval, proximité avec le sillage et turbulence proche du bord de fuite de la pale amont). La qualité de la détection du centre du tourbillon est liée à la qualité du maillage. On peut donc considérer les approximations de la trajectoire comme des descriptions intrinsèques de la dynamique du tourbillon.

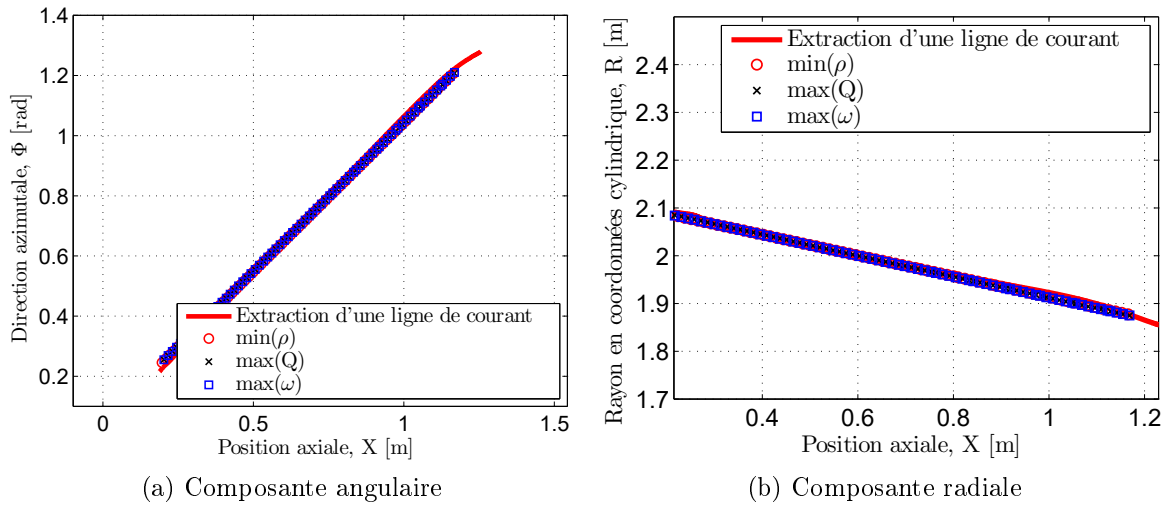


Figure 2.8 Approximation de la trajectoire du centre du tourbillon \mathbf{X}_v dans le repère global \mathfrak{R}_0 à partir des entrées obtenus par différents critères de détection automatique de tourbillons.

À partir de la trajectoire du centre du tourbillon, le repère local lié au tourbillon sera reconstruit. Ce repère permettra l'extraction et la comparaison avec les modèles analytiques décrits dans la section 2.2.3. Il est défini comme $\mathfrak{R}_v(s) = (\mathbf{X}_v(s), \mathbf{t}_v(s), \mathbf{n}_v(s), \mathbf{b}_v(s))$. \mathbf{t}_v est le vecteur tangent unitaire à la trajectoire du centre du tourbillon. Il se définit par la relation :

$$\mathbf{t}_v(s) = \frac{\partial \mathbf{X}_v}{\partial s}, \quad (2.57)$$

La figure 2.9 présente ses composantes avant et après le lissage de la trajectoire du tourbillon selon les équations (2.55) et (2.56). La ligne de courant extraite du calcul qui *a priori* était au centre du tourbillon présente des fluctuations indiquant que même cette ligne n'est pas la trajectoire exacte du centre du tourbillon.

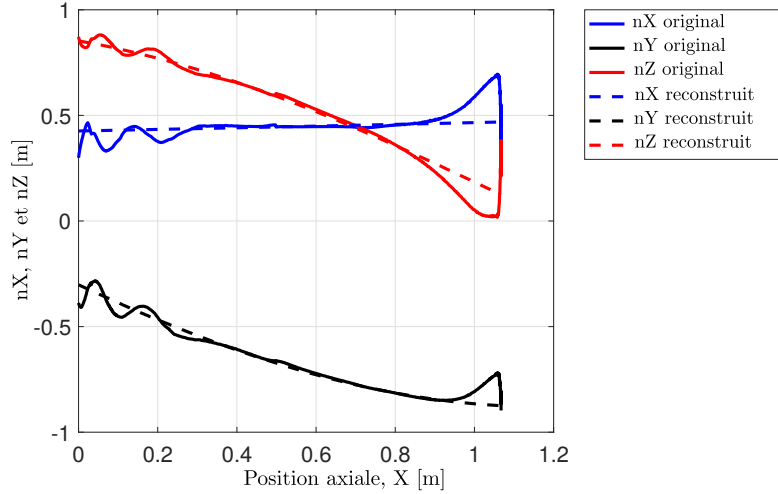


Figure 2.9 Composantes de $\mathbf{t}_v(s)$ dans le repère global \mathcal{R}_0 avant et après lissage.

Dans le cas d'une extraction numérique, une méthode aux différences finies sera utilisée pour obtenir localement la tangente à la trajectoire. À partir de ce vecteur tangent, le plan normal à la trajectoire du tourbillon est obtenu. Les points \mathbf{X}_a de ce plan respectent l'équation :

$$P(\mathbf{X}_a) = \mathbf{t}_v \cdot (\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_v) = 0. \quad (2.58)$$

La figure 2.10 montre quelques plans normaux à la trajectoire \mathbf{X}_v pour différentes étapes de la convection du tourbillon marginal provenant du rotor amont ($R1$). D'une part, on vérifie visuellement qu'effectivement les plans sont perpendiculaires à la trajectoire du tourbillon.

D'autre part, on remarque que certains plans ne sont pas complets. Pour le plan à $\approx 50\%$ de la distance $R1-R2$, la taille du bloc d'extraction utilisé pour extraire les plans est la cause du manque de données. Par contre, le plan situé à $\approx 85\%$ de la distance $R1-R2$ est découpé, car il traverse le bord d'attaque de la pale aval. C'est une limitation de cette méthode d'extraction. La distance $R1-R2$ est la distance entre le bord de fuite du rotor amont et le bord d'attaque du rotor aval choisi au niveau du saumon des pales.

À partir de ces plans, les vitesses du tourbillon sont extraites. En partant du vecteur vitesse relative dans le repère du rotor amont \mathbf{u}_{R1} décrit dans le référentiel \mathfrak{R}_v , on a :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_p) = \begin{pmatrix} u_z(\mathbf{X}_p) = \mathbf{u}_{R1} \cdot \mathbf{t}_v \\ u_r(\mathbf{X}_p) = \mathbf{u}_{R1} \cdot \frac{\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_v|} \\ u_\theta(\mathbf{X}_p) = \mathbf{u}_{R1} \cdot \mathbf{t}_v \wedge \frac{\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_v|} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}_v, \mathfrak{R}_v}, \quad (2.59)$$

avec (u_z, u_r, u_θ) les vitesses dans le référentiel local du tourbillon \mathfrak{R}_v .

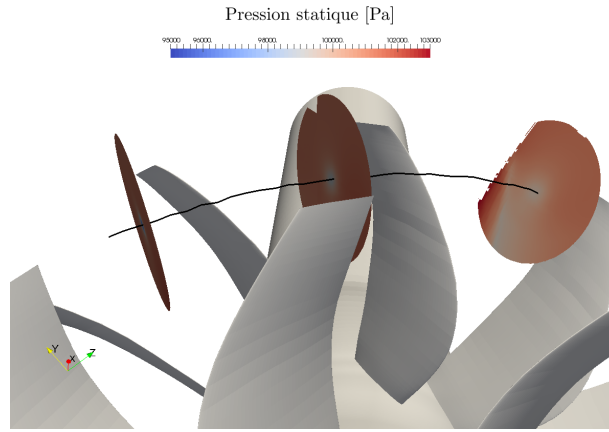


Figure 2.10 Vue globale de la reconstruction du tourbillon à différentes positions d'extraction. La ligne noire est la trajectoire du tourbillon. Les plans d'extraction sont proches du bord de fuite du rotor amont ($\approx 5\%$ de la distance $R1-R2$), à mi-distance ($\approx 50\%$ distance $R1-R2$) et près du bord d'attaque du rotor aval ($\approx 85\%$ distance $R1-R2$).

La figure 2.11 présente l'extraction de la vorticité axiale dans le repère local \mathfrak{R}_v :

$$\omega_z = \boldsymbol{\omega}_{R1} \cdot \mathbf{t}_v, \quad (2.60)$$

avec $\boldsymbol{\omega}_{R1}$ le vecteur vorticité relatif dans le repère \mathfrak{R}_0 .

Premièrement, on observe que le tourbillon est diffusé durant sa convection entre le bord de fuite du rotor amont et son impact au bord d'attaque du rotor aval ($R2$). Cette diffusion est aussi bien physique que numérique. Ceci justifiera plus tard la modélisation de la diffusion du tourbillon pour pouvoir extrapoler des extractions de calculs RANS là où le tourbillon disparaît après le plan de mélange.

À 5% de la distance $R1-R2$, on remarque que le tourbillon semble entièrement enroulé. En effet, la trace de vorticité est parfaitement ronde et n'est pas déformée par l'effet potentiel du bord de fuite de la pale amont ni par le sillage.

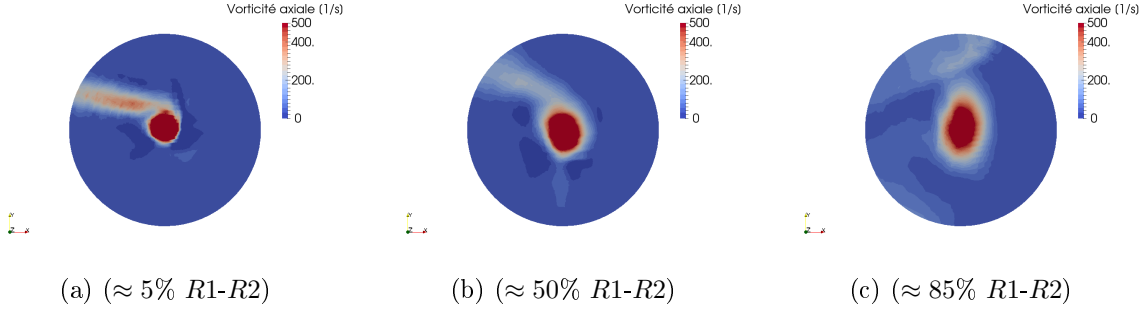


Figure 2.11 Extractions de la vorticité axiale pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.

Les figures 2.12 présentent les extractions effectuées sur les plans présentés sur la figure 2.10. Le rayon maximal de ces plans a été réduit pour pouvoir obtenir des disques complets.

Premièrement, les composantes 3D de la vitesse ont des dynamiques différentes. En effet près du centre du disque, la vitesse radiale (figs. 2.12a, 2.12d et 2.12g) présente de faibles variations alors que les vitesses azimutales et axiales y ont des dynamiques importantes.

On remarque aussi la combinaison du sillage et du tourbillon dans les figs. 2.12c et 2.12f. Le tourbillon présente une forme circulaire alors que le sillage a une forme plus allongée. Par contre, cette combinaison n'est plus visible pour le dernier plan d'extraction (fig. 2.12i). La séparation progressive entre le sillage et le tourbillon est due à la différence de vitesse de convection et de diffusion des deux phénomènes.

Les variations de vitesse axiale vues aux extrémités du disque proviennent du cisaillement de la vitesse de convection (figs. 2.12c, 2.12f et 2.12i). On distingue la partie du fluide entraînée par les pales (faible vitesse relative) du fluide au repos (haut niveau de vitesse relative). La zone de haute vitesse axiale dans le disque proche du bord d'attaque de la pale aval correspond à l'accélération du fluide à l'extrados du profil (fig. 2.12i). Cet effet de la pale aval est moyenné temporellement à cause des extractions effectuées dans le domaine du rotor amont.

En plus du cisaillement de l'écoulement moyen, le tourbillon extrait subit l'influence de la circulation des tourbillons des pales adjacentes. La forme du tourbillon devient alors elliptique [32]. Par conséquent les vitesses du tourbillon ne sont donc pas axisymétriques. De plus, une direction ne peut être privilégiée pour l'extraction des paramètres relatifs aux

modèles analytiques présentés précédemment $(r_0, u_\theta^{max}, u_z^{max})$. Une moyenne azimutale est donc nécessaire.

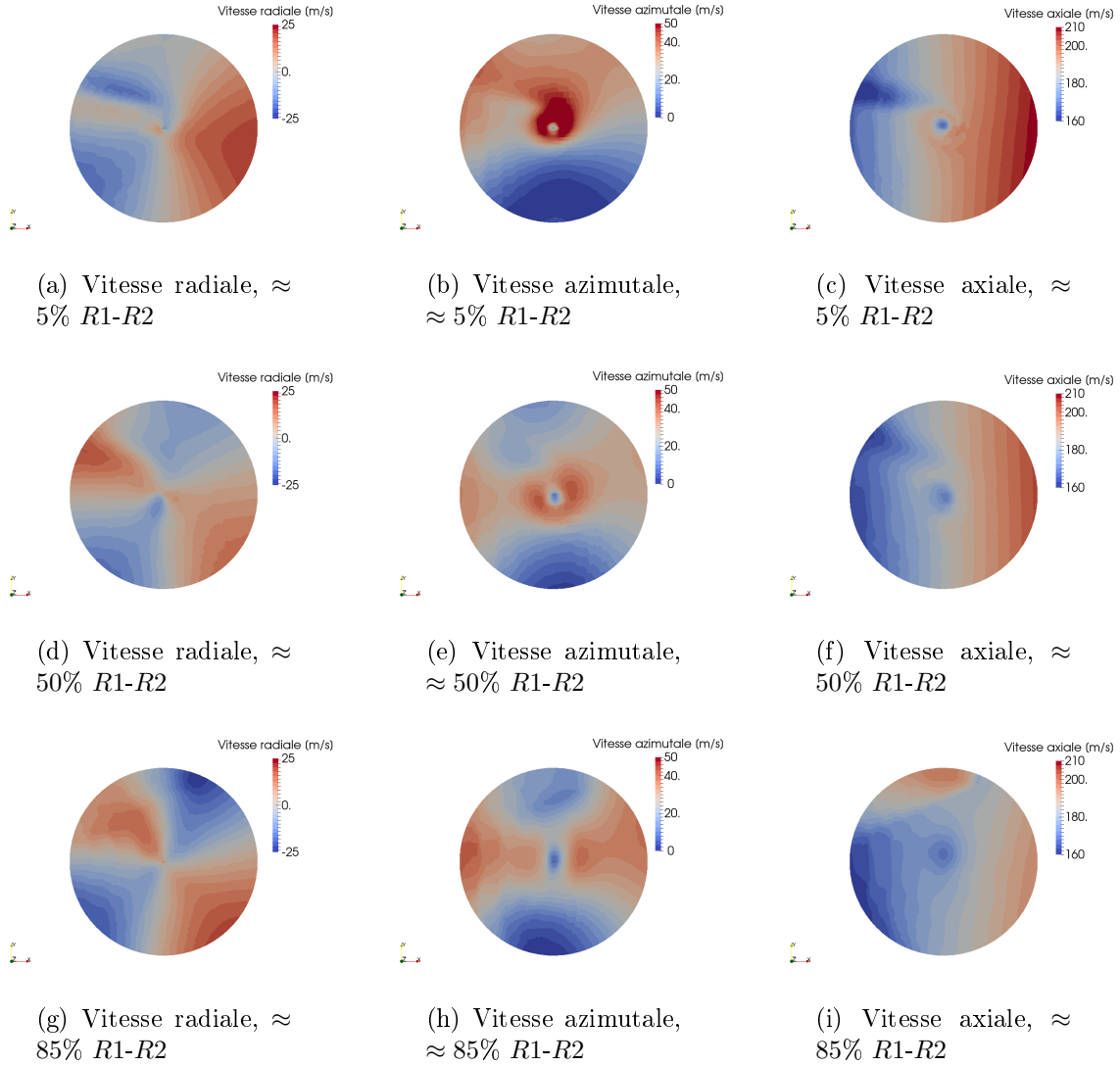


Figure 2.12 Extractions des vitesses pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.

La moyenne azimutale ne peut pas être directement faite sur le maillage original (figure 2.13a), car il n'est pas régulier en azimut dans le repère local \mathfrak{R}_v ; une interpolation des résultats sur une grille régulière locale (figure 2.13b) a donc été réalisée. On vérifie grâce à la cartographie en couleur que les résultats interpolés sont fidèles à ceux extraits de la solution originale.

La figure 2.14 présente le résultat de cette moyenne azimutale. Pour évaluer la qualité des résultats, l'écart type des données est ajouté et soustrait à la moyenne ce qui donne à chaque fois trois profils de vitesse.

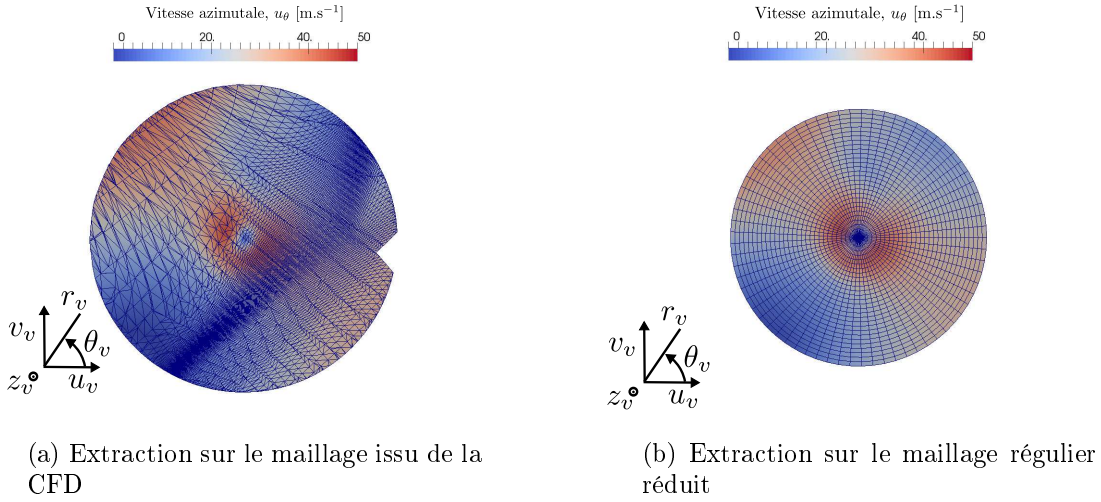


Figure 2.13 Interpolation de la vitesse azimutale sur une grille régulière pour le plan situé à 50% de la distance $R1-R2$, voir fig. 2.12e.

En ce qui concerne la vitesse radiale (figures 2.14a, 2.14d et 2.14g), sa moyenne azimutale est en général d'un ordre de grandeur inférieur à celles de la vitesse axiale et azimutale. Cela justifie que le modèle analytique de tourbillon retenu ne prenne pas en compte la vitesse radiale moyenne. Le seul problème concerne les résultats près du centre de rotation. Cependant, ces variations sont vraisemblablement un artefact numérique. Le lissage de la trajectoire du tourbillon et des normales, la qualité du maillage original et l'interpolation sur le maillage régulier en sont les probables explications. On remarque de la même manière que la vitesse azimutale n'est pas exactement nulle au centre du disque.

En ce qui concerne la vitesse azimutale (figures 2.14b, 2.14e et 2.14h), on remarque tout d'abord que le comportement est conforme aux familles de tourbillons extraites de la littérature. Tout d'abord, la vitesse varie linéairement jusqu'à un maximum puis décroît. Cependant, contrairement aux modèles de tourbillons isolés trouvés dans la littérature, la décroissance se sature à une valeur non nulle. Cet effet s'explique par le gradient de la vitesse de convection et la présence des tourbillons des pales adjacentes. On remarque même que pour le dernier plan à 85% de la distance $R1-R2$, la vitesse augmente à l'extrémité du disque. Cet effet est dû à l'effet potentiel du bord d'attaque de la pale aval (figure 2.10).

Pour finir, les figures 2.14c, 2.14f et 2.14i confirment que le profil moyen de la vitesse axiale ne peut pas être ignoré. De plus, les résultats à 50% de $R1-R2$ suggèrent le comportement gaussien du déficit de vitesse. On observe aussi un déficit de vitesse ce qui est en accord avec les précédentes expériences sur des DHCR [32, 160]. D'après les résultats de Betz, on ne pourra donc pas utiliser un taux de décroissance de la vitesse azimutale $n > 0,44$. Le

déficit de vitesse axiale décroît le long de la convection du tourbillon par diffusion physique et numérique. En effet, la dynamique de la vitesse axiale passe de 20 m.s^{-1} à 7 m.s^{-1} entre la première et la dernière surface d'extraction alors que la vitesse de rotation passe de 55 à 30 m.s^{-1} . En considérant la conservation de la quantité de mouvement 3D cylindrique, cela peut aussi expliquer les hauts niveaux de la vitesse radiale extraits du calcul.

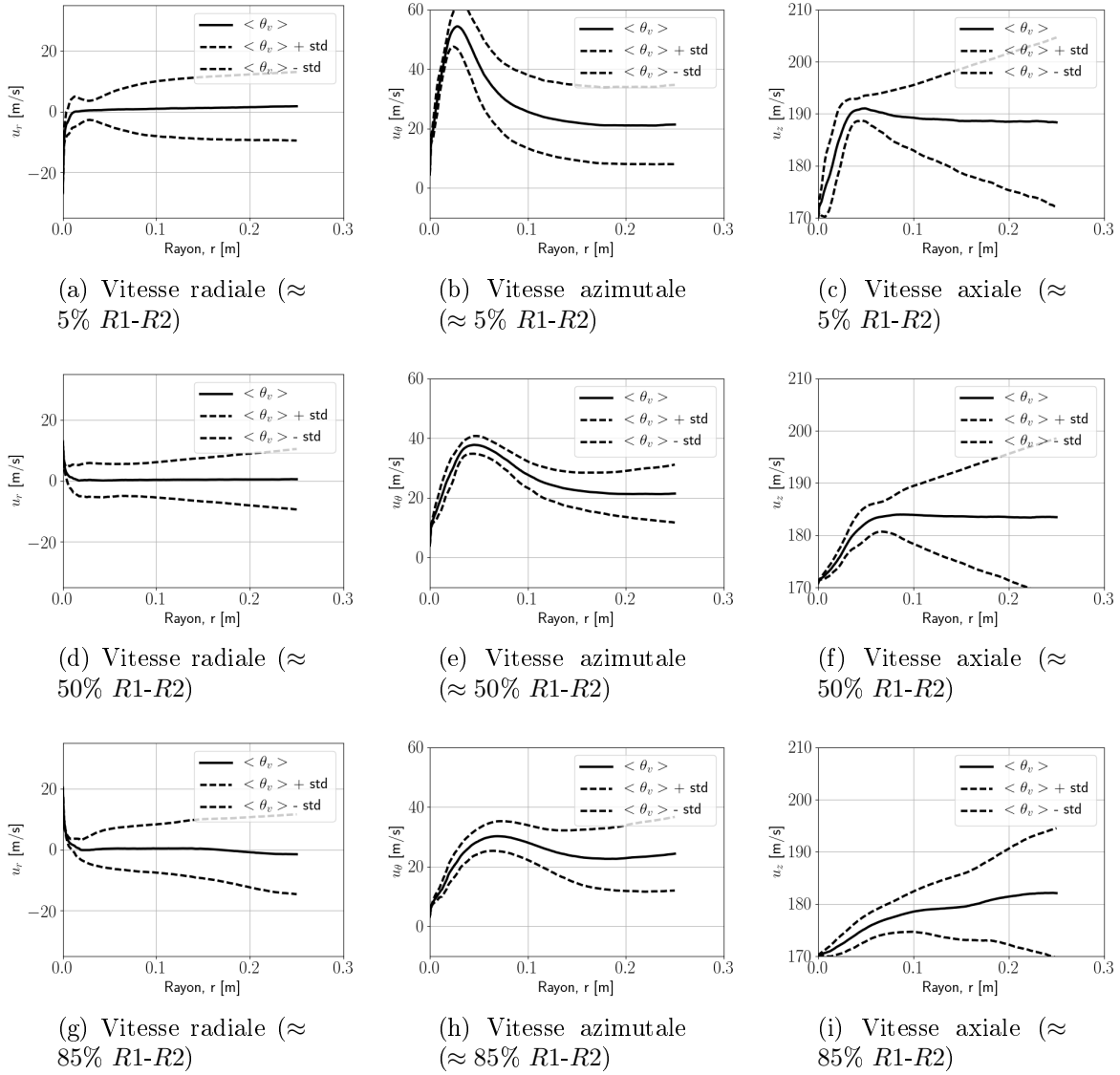


Figure 2.14 Profils de vitesse pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10.

La figure 2.15 montre les différents modèles analytiques présentés dans la partie précédente comparés aux extractions numériques. Les extractions sont adimensionnées par le rayon où la vitesse azimuthale est maximale pour les abscisses. Les ordonnées sont adimensionnées par les valeurs maximales extraites.

Dans le cas considéré, le chargement en tête de pale donne un tourbillon qui se comporte comme un tourbillon avec circulation totale. En effet, la vorticité extraite ne comporte aucune partie négative. Tout d'abord, on remarque que les tourbillons de Lamb-Oseen et de Vatisstas avec $n = 2$ sont similaires. Ensuite, on distingue qu'aucun modèle analytique ne représente adéquatement toutes les extractions de tourbillons au-delà du coeur du tourbillon. Cependant, on observe qu'en prenant les tourbillons de Scully, de Lamb-Oseen et de Taylor, une large gamme de décroissance de la vitesse azimuthale est couverte. On choisira donc ces modèles de tourbillons pour la vitesse azimuthale.

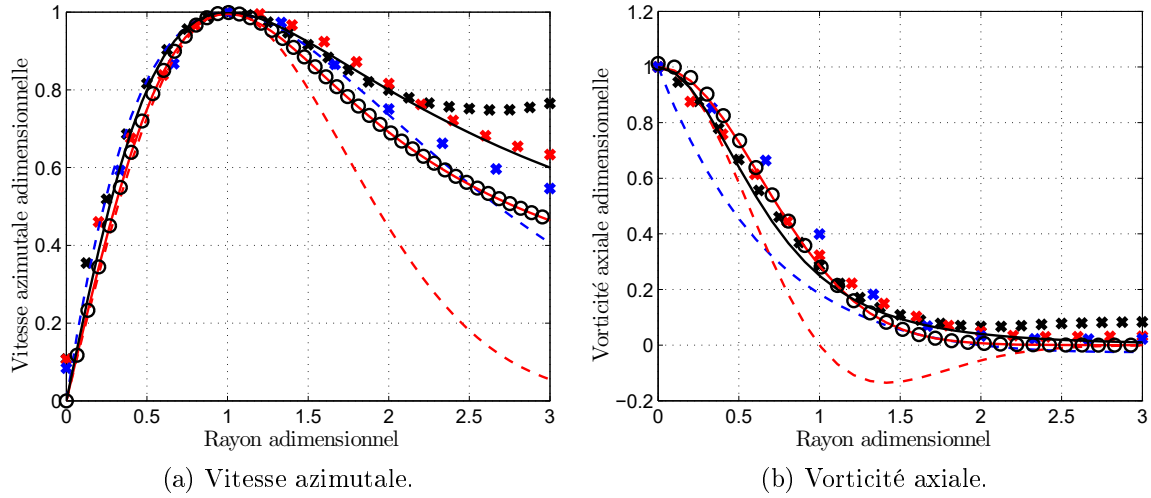


Figure 2.15 Modèles 2D : comparaison numérique/analytique pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10. Extractions numériques pour 5% $R1-R2$: \times ; 50% $R1-R2$: \times ; 85% $R1-R2$: \times . CMW sans circulation totale $n = 1$: ---; tourbillon de Taylor : - - -; tourbillon de Scully : —; tourbillon de Lamb-Oseen : \bigcirc ; Tourbillon de Vatisstas avec $n = 2$: —.

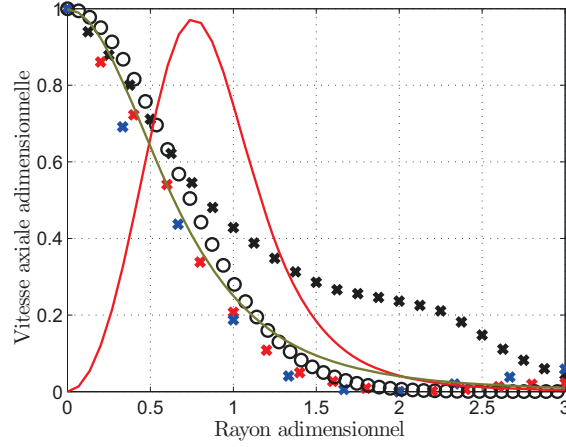
Le même travail a été réalisé à propos de la vitesse axiale avec les modèles disponibles. Les résultats sont présentés sur la figure 2.16. Les extractions de la vitesse axiale sont adimensionnées selon l'expression :

$$\bar{u}_z = -\frac{(u_z - \min(u_z))}{(\max(u_z) - \min(u_z))}. \quad (2.61)$$

Les modèles de Vatisstas avec $n = 1$ et le Q-vortex sont très proches des extractions numériques. Au contraire, le tourbillon de Vatisstas avec $n = 2$ n'a pas le même comportement et ne peut pas être utilisé pour le cas FL05/AL05.

Pour l'extraction à 85% $R1-R2$, on remarque que la vitesse axiale se comporte différemment des deux autres extractions. Aucun modèle analytique ne parvient à reproduire cette

fluctuation. Ces résultats sont probablement dus à l'effet potentiel du bord d'attaque de la pale aval.



(a) Vitesse axiale.

Figure 2.16 Modèles 3D : comparaison numérique/analytique pour les 3 plans indiqués sur la figure 2.10. Extractions numériques pour 5% $R1-R2$: \times ; 50% $R1-R2$: \times ; 85% $R1-R2$: \times ; Q-vortex : \bigcirc ; modèle de Vatistas avec $n = 1$: — ; avec $n = 2$: —.

Une autre manière d'observer la qualité des modèles analytiques est de reconstruire une partie des fluctuations de vitesse avec l'aide des modèles analytiques et de comparer ces résultats à une extraction directe issue de la CFD. La fluctuation de vitesse radiale u_R dans le référentiel \mathfrak{R}_0 est choisie pour ce test. Elle est donc extraite de manière brute des résultats CFD sur un arc de cercle. Cet arc est à position axiale constante et croise le centre du tourbillon en $R_v(X)$. Si l'on néglige la contraction du tube de courant, le changement de repère s'effectue uniquement grâce à l'angle d'hélicité φ qui s'obtient par :

$$\varphi(X) = \text{atan} \left(\frac{1}{a_\Phi R_v} \right), \quad (2.62)$$

en utilisant la pente de la régression linéaire utilisée dans l'éq.(2.55). En coordonnées déroulées 2D $(X, R_v\Phi)$, le centre du tourbillon est en $\Phi_{0,i} = 2\pi i/B_1$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Le rayon r_i dans le repère local du tourbillon i s'obtient grâce à :

$$r_i(\Phi) = \frac{(\Phi - \Phi_{0,i})R_v}{\sin \varphi}, \quad (2.63)$$

La fluctuation de vitesse radiale s'obtient finalement en assemblant la contribution de tous les tourbillons :

$$u_R(\Phi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(r_i) u_\theta(|r_i|), \quad (2.64)$$

avec $u_\theta(r)$ les modèles de vitesse azimutale analytique. La figure 2.17 présente le résultat de la reconstruction.

On remarque que les tourbillons analytiques représentent globalement bien la fluctuation de vitesse radiale extraite de la CFD. Les erreurs obtenues loin du centre du tourbillon n'apparaissent pas. Ceci signifie que les différences dans les résultats précédents n'étaient pas dues au comportement du tourbillon, mais bien à la méthode d'extraction. De plus, on observe que la décroissance de la vitesse azimutale caractérisée par le tourbillon de Taylor est trop rapide pour représenter correctement la fluctuation de vitesse dans le cas FL05/AL05.

Avec les tourbillons de Lamb-Oseen et de Scully, les résultats analytiques et numériques sont encore légèrement différents. Ces écarts proviennent de l'influence de la vitesse axiale et de la contraction de la veine fluide. La reconstruction de la vitesse radiale montre que le comportement de la vitesse azimutale loin du disque d'extraction n'est pas lié au comportement du tourbillon.

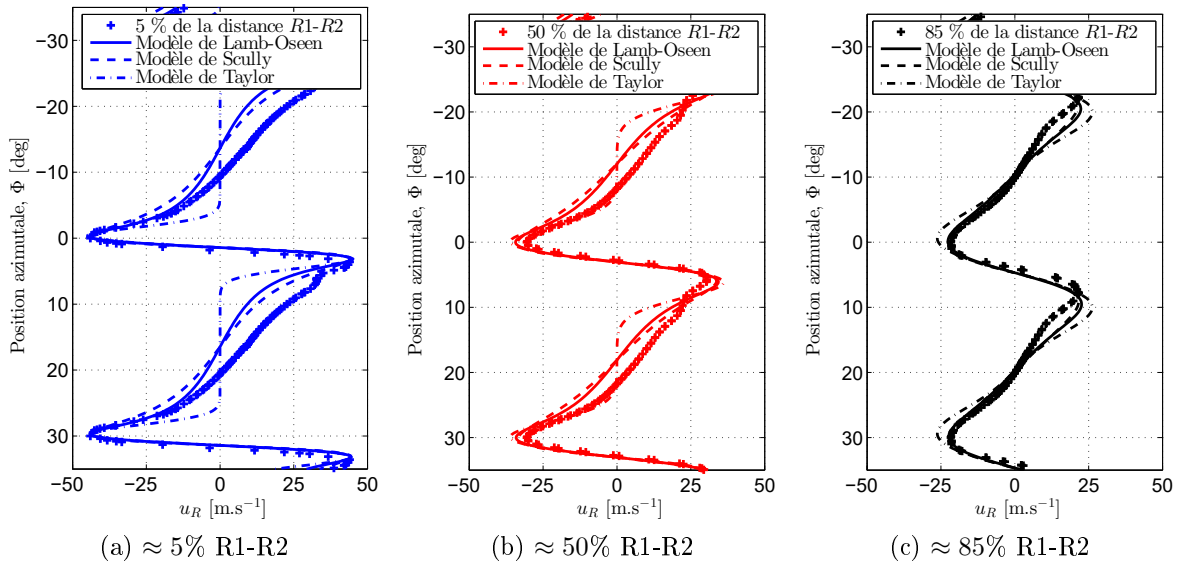


Figure 2.17 Comparaison numérique/analytique pour la vitesse radiale dans le repère global \mathfrak{R}_0 .

Sur la figure 2.18a, le rayon du tourbillon r_0 est extrait pour différentes positions des disques d'extraction. Ce rayon est la distance pour laquelle la vitesse azimutale maximale (u_θ^{max}) est obtenue. Suivant le modèle de diffusion proposé par Squire [145], le rayon visqueux du tourbillon augmente proportionnellement à \sqrt{t} , où t évalue le temps de convection du tourbillon.

La figure 2.18 présente les extractions du rayon visqueux du tourbillon et de la vitesse azimutale maximale. On propose d'utiliser une distance de convection adimensionnée $X^* = X/R_{R1,tip}$ avec $R_{R1,tip}$ le rayon de la pale amont $R1$. Cette approche est équivalente à la définition d'un temps de convection et a déjà été utilisée par Batchelor [10]. Grâce à une viscosité équivalente proposée par Squire [145], les régressions

$$\begin{aligned} r_0^2(X^*) &= r_{0,X}^2 X^* + r_{0,i}^2 \\ u_\theta^{max}(X^*) &= \frac{u_{\theta,X}^{max}}{\sqrt{X^*}} + u_{\theta,i}^{max}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

permettent de prévoir adéquatement la diffusion du tourbillon. En effet, les paramètres des régressions linéaires, $(r_{0,X}^2, r_{0,i}^2)$ et $(u_{\theta,X}^{max}, u_{\theta,i}^{max})$ sont obtenus en utilisant l'intégralité du volume inter-rotor (carré bleu) ou le domaine en rotation avec le rotor amont (croix bleues). Il s'avère que le résultat des deux régressions est précis. Ce résultat valide ainsi l'utilisation de cette forme de régression si le tourbillon n'est disponible que dans le domaine du rotor amont ce qui est le cas dans une simulation RANS.

Les différences de prévisions dans le cas d'une régression avec des entrées tronquées sont de l'ordre de 10 %. Ces fluctuations devraient par conséquent avoir une influence minimale sur la prévision du bruit émis. Cependant, une étude paramétrique des effets de r_0 et u_θ^{max} sur le bruit rayonné pourra appuyer la qualité des régressions proposées.

2.3 Séparation sillage / tourbillon

La modélisation du tourbillon proposée dans la section précédente doit être compatible avec les travaux précédents concernant le bruit d'interaction des DHCR. Notamment le deuxième contributeur sonore au bord d'attaque de la pale aval provient du sillage visqueux selon la décomposition proposé par Peters et Spakovszky [117] et décrit quantitativement dans la section 1.1.1.

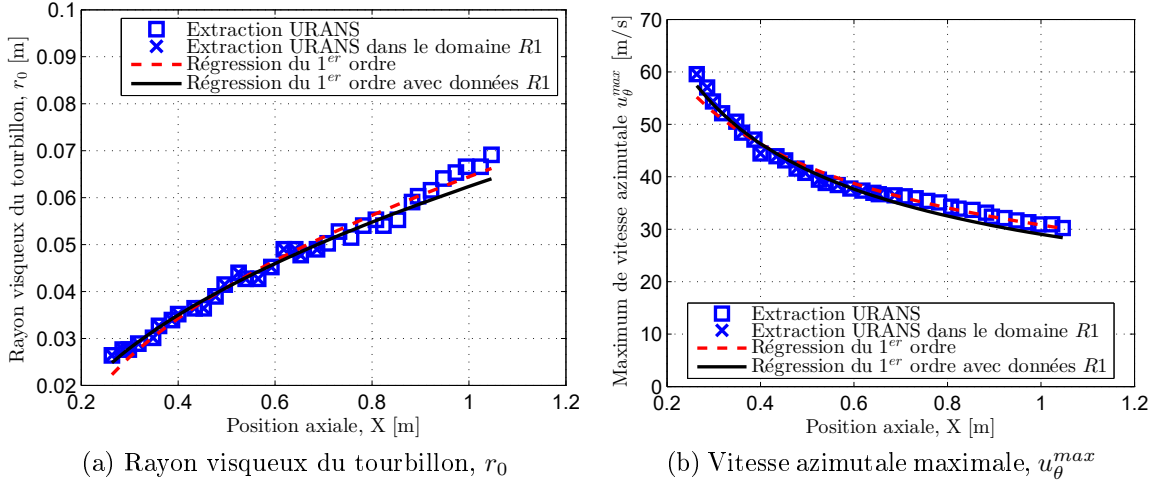


Figure 2.18 Diffusion du tourbillon dans le volume inter-rotor.

2.3.1 Introduction

Dans la méthodologie proposée par Carazo *et al.* [20] pour modéliser l'interaction de sillages, les vitesses $\mathbf{U} = (U_X, U_R, U_\Phi)$ sont extraites dans le repère \mathfrak{R}_0 relatif au rotor amont en coordonnées cylindriques. La figure 2.19 illustre le plan utilisé pour l'extraction des vitesses incidentes au bord d'attaque des pales de $R2$. Ce plan est une coupe à i constant du bloc proposé sur la figure 2.6a. Pour l'instant, les extractions de vitesse proposées sont donc valables pour un calcul URANS puisqu'elles nécessitent les variables aérodynamiques dans le domaine du rotor aval. La figure 2.19b montre aussi que la couche limite au niveau du moyeu (Hub) n'est pas extraite pour les résultats. En effet, la phase des sources acoustiques dans la direction radiale calculée avec la méthodologie présentée par Carazo [19] montrait pour le cas FL05/AL05 des variations non-physiques.

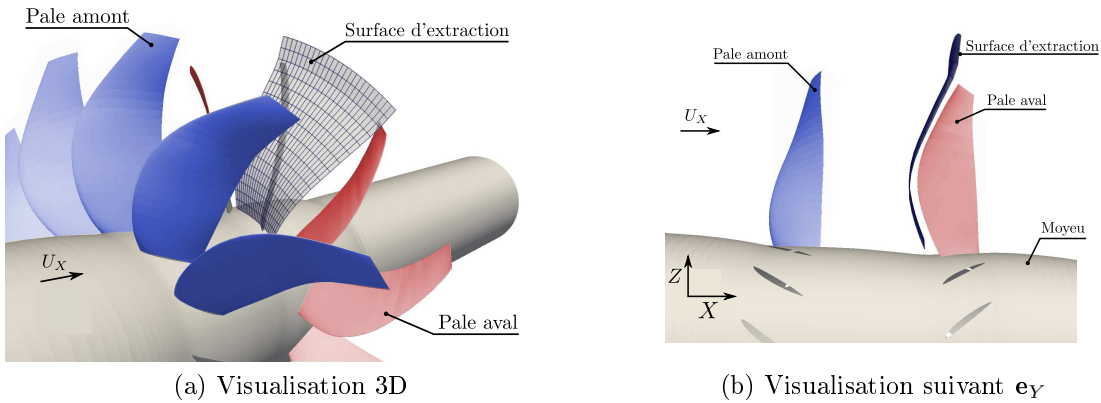


Figure 2.19 Visualisation du plan d'extraction utilisé pour le modèle BRWI.

Dans le travail de Carazo [19], aucune distinction entre sillages et tourbillons n'est supposée et les fluctuations de vitesse sont extraites directement depuis les résultats CFD. Si l'on souhaite calculer le bruit tonal associé aux sillages, il faut séparer les fluctuations de vitesse issues du sillage et du tourbillon directement à partir des résultats CFD.

Pour les DHCR, la méthode classique de séparation entre le sillage et le tourbillon consiste à couper les fluctuations de vitesse au-dessus du rayon où la fluctuation de vitesse associée au tourbillon dépasse celle associée aux sillages [63, 75]. Cette méthode est arbitraire et ne prend pas en compte le fait que sillages et tourbillons sont présents à des rayons équivalents. Une méthode est présentée ici pour séparer le sillage et le tourbillon sur le plan d'extraction de la figure 2.19. Elle consiste à moduler la vitesse dans la direction \mathbf{e}_{yc2} du repère \mathfrak{R}_p en utilisant une fonction de filtrage.

2.3.2 Méthode basée sur une fonction de filtrage

À partir de $\mathbf{U} = (U_X, U_R, U_\Phi)$ dans le repère \mathfrak{R}_0 extrait sur le plan d'extraction de la figure 2.19, les fluctuations de vitesse dans la direction \mathbf{e}_Φ sont tout d'abord calculées. Ces vitesses sont responsables du chargement instationnaire sur le rotor aval et s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle, \quad (2.66)$$

où $\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de moyenne méridienne (moyenne dans la direction \mathbf{e}_Φ) qui s'écrit de manière discrète :

$$\langle \mathbf{U}(X, R) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{U}(X, R, \Phi_i). \quad (2.67)$$

En utilisant les conventions du tableau 1.1, la fluctuation de vitesse suivant \mathbf{e}_{yc2} est calculée dans le repère \mathfrak{R}_p . Cette vitesse, combinaison de u_X et u_Φ , est appelée *upwash* (w) et dépend de la position axiale d'extraction X , du rayon d'extraction R et de l'angle azimutal de l'extraction Φ . Elle ne dépend pas du temps puisque les résultats sont extraits dans le repère attaché au rotor amont et sont moyennés sur un passage de pale de $R2$.

Si l'on considère qu'une fonction de filtrage permette d'annuler les fluctuations de vitesse provenant du tourbillon alors cela signifie que la vitesse suivant \mathbf{e}_{yc2} corrigée peut s'écrire :

$$w_c(X, R, \Phi) = f(X, R, \Phi)w(X, R, \Phi), \quad (2.68)$$

où $f(X, R, \Phi)$ est une fonction filtrant l'*upwash* subi par la pale aval. Cette fonction est, par définition, adimensionnelle (entre 0 et 1) et ne dépend que de l'étendue spatiale du tourbillon.

Le tourbillon est caractérisé par le rayon visqueux r_0 décrit dans le repère local à sa trajectoire $\mathfrak{R}_v = (\mathbf{X}_v, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Pour décrire la fonction de filtrage, les coordonnées spatiales du plan d'extraction (X, R, Φ) sont donc écrites dans le repère du tourbillon \mathfrak{R}_v lorsque celui-ci croise le plan d'extraction. Le triplet (X, R, Φ) écrit dans le repère \mathfrak{R}_0 correspond à un unique triplet de coordonnées (z, r, θ) écrit dans le repère \mathfrak{R}_v . On note que le triplet $(0, 0, 0)_{\mathfrak{R}_v}$ correspond à l'intersection entre la trajectoire du tourbillon et le plan d'extraction. Si l'on considère que la correction est axisymétrique et quasi-2D sur une faible distance à travers le plan d'extraction alors :

$$f(X, R, \Phi)_{\mathfrak{R}_0} \rightarrow f(r)_{\mathfrak{R}_v}. \quad (2.69)$$

La fonction de filtrage doit être nulle avant le centre visqueux du tourbillon puis, comme les vitesses tourbillonnaires décroissent vers zéro quand on s'éloigne du centre tourbillonnaire, elle tend vers 1. On retrouve plusieurs fonctions ayant ce comportement dans la littérature.

Les fonctions de filtrage appropriées sont tout d'abord testées sur un cas canonique unidirectionnel dont les résultats sont présentés sur la figure 2.20. Cette configuration est composée d'un tourbillon de Lamb-Oseen de paramètres $u_\theta^{max} = 1 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 1 \text{ m}$ situés en $r = 0$ et d'un sillage gaussien d'amplitude $u_w^{max} = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$ et $r_0 = 1 \text{ m}$ dont le centre est situé en $r = 4 \text{ m}$. La cinématique de ce cas test est illustrée sur la figure 2.20a.

À l'intérieur du rayon visqueux du tourbillon, la fonction de filtrage est supposée nulle $f(r < r_0) = 0$. Après le rayon visqueux ($r > r_0$), le choix de cette fonction entre sillages et tourbillons est arbitraire. Pour ce travail, trois fonctions ont été testées :

$$\begin{aligned} f_1(r) &= 1 - \exp(-(r - r_0)^2/r_0^2), \\ f_2(r) &= 1 + \operatorname{erf}\left(\left(\frac{r_0}{r - r_0}\right)^2\right), \\ f_3(r) &= 1 + \tanh\left(\left(\frac{r_0}{r - r_0}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Ces trois fonctions sont choisies car elles sont \mathbb{C}^1 et permettent de parcourir une grande plage de variation. Leur comportement est présenté sur la figure 2.20b.

Les profils de vitesse pour l'*upwash* corrigée et le sillage canonique seul sont présentés sur la figure 2.20c. Tout d'abord, on observe qu'aucune fonction ne permet d'obtenir un sillage unique. Cependant, on remarque que l'*upwash* corrigée par la fonction gaussienne prédit un double pic de vitesse qui n'est pas prédit avec f_2 et f_3 . La fluctuation de vitesse est aussi calculée pour les *upwash* corrigées et le sillage seul. Les résultats sont présentés sur la figure 2.20d. On remarque alors que la fonction f_3 sous-prédit le gradient spatial de l'*upwash* lié au sillage alors que f_1 et f_2 prévoient des variations de vitesse identiques. On remarque que les trois modèles prédisent une variation de vitesse *irréaliste* en $r = 2$. Cet artefact existe pour n'importe quel choix de f qui est donc un compromis entre limiter au maximum la fluctuation située en $r = 2$ et capter adéquatement la fluctuation issue du sillage.

La fonction de filtrage présentée jusqu'à maintenant prend en compte la présence d'un tourbillon unique. Or l'effet des B_1 tourbillons est présent si l'*upwash* provient d'une extraction CFD. La fonction de correction totale à appliquer est alors :

$$w_c(X, R, \Phi) = \sum_{n=0}^{B_1-1} f_*(r_n) w(X, R, \Phi), \quad (2.71)$$

où l'indice $*$ indique la fonction de filtrage utilisée et r_n indique la distance dans la direction \mathbf{e}_r par rapport au n ème centre des tourbillons provenant du rotor amont.

Cette méthode de correction est préliminaire et sépare artificiellement les tourbillons des sillages. En réalité, l'*upwash* corrigée est plus vraisemblablement de la forme :

$$w_c(X, R, \Phi) = w(X, R, \Phi) - w_v(X, R, \Phi), \quad (2.72)$$

où w_v indique l'*upwash* créée par le tourbillon. Cette correction pourra être examinée dans un futur travail. De plus, la séparation telle que présentée actuellement ne prend pas en compte la phase temporelle (ou angulaire) entre la fluctuation de vitesse associée au sillage et celle associée au tourbillon. Cette phase permettrait de prévoir le chargement instationnaire et le bruit émis en considérant sillages et tourbillons comme deux sources corrélées. Puisqu'on utilise des théories linéarisées soustraire $w_v(X, R, \Phi)$ aux résultats extraits de la CFD n'est pas interdit. Cependant les résultats des figures 2.12 et 2.14 montrent que le tourbillon est asymétrique. En utilisant la correction de l'éq. (2.72) l'axisymétrie du tourbillon sera comptée comme appartenant au sillage.

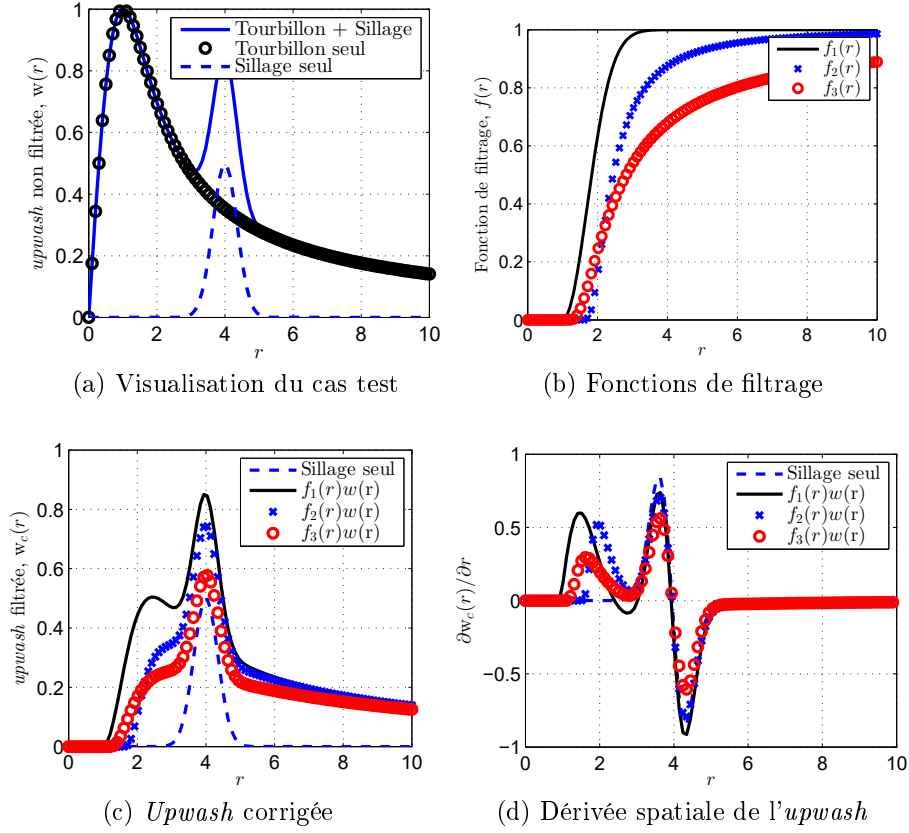


Figure 2.20 Test canonique pour la séparation entre sillages et tourbillons.

2.3.3 Application au cas FL05/AL05

La première étape consiste à extraire les variations azimutales de la vitesse axiale et tangentielle. Le résultat de cette extraction est présenté sur la figure 2.21. Les zones d'influence des tourbillons et des sillages sont illustrées sur la figure 2.21a ainsi que le résultat de ces extractions. Le plan d'extraction de la figure 2.19 est répété une fois dans la direction \mathbf{e}_Φ pour apprécier la périodicité du phénomène. On observe que les courbes d'isovaleurs ne sont pas parfaitement lisses. Cet effet provient des erreurs d'interpolation entre le maillage du calcul et le maillage structuré présenté sur la figure 2.6a. On remarque que l'influence du tourbillon est très étalée dans la direction \mathbf{e}_Φ alors que celle du sillage est plus concentrée. Cet effet provient de l'angle d'hélicité φ plus faible que les sillages. De manière similaire aux résultats obtenus par Colin *et al.* [24], les fluctuations issues du sillage se composent d'un déficit de vitesse ($u_X < 0$) provenant de la condition de non-glissement à la surface des pales de *R1*, mais aussi d'un excès de vitesse ($u_X > 0$) provenant de l'accélération du fluide à l'extrados des pales amont.

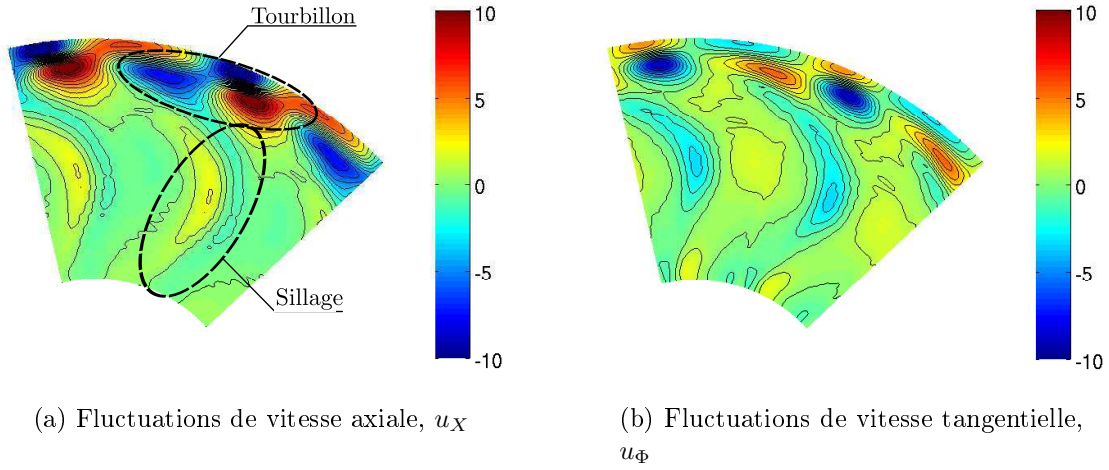


Figure 2.21 Extractions des fluctuations de la vitesse axiale (u_X) et tangentielle (u_Φ) dans le repère tournant avec le rotor amont au niveau du plan d'extraction indiqué sur la figure 2.19 en utilisant 21 courbes d'isovaleurs.

La fonction de filtrage peut être modélisée à partir des extractions de r_0 (figure 2.18), mais aussi de la trajectoire du tourbillon (figure 2.8). Dans cet exemple, f_1 est utilisée, car f_2 et f_3 montrent des taux de croissance faibles comparés à la distance sillage/tourbillon. Le résultat pour une unique fonction de filtrage est illustré sur la figure 2.22a. La forme elliptique des iso-valeurs de la fonction de filtrage provient de la projection d'un tube localement hélicoïdal sur une surface plane. Cette forme a déjà pu être observée pour les tourbillons d'extrémité de DHCR par Danner et Kendall-Torry [29] grâce à des extractions sur des calculs URANS.

L'ensemble des fonctions de filtrage est présenté sur la figure 2.22b. On observe un recouvrement des fonctions de filtrage d'un tourbillon à l'autre indiquant que les tourbillons provenant de pales différentes interagissent les uns avec les autres [53].

Pour finir, les différentes *upwash* sont présentées sur la figure 2.23. On remarque que la fonction de filtrage supprime efficacement l'influence du tourbillon. On observe aussi que la queue de sillage présente sur la coupe C-C ne semble pas être distordue par la correction.

Dans le but d'évaluer plus quantitativement l'effet de la correction, les *upwash* sont extraites au niveau des lignes de coupe indiquées sur la figure 2.23a. Les résultats sont présentés sur la figure 2.24. Les coupes A-A et B-B montrent que la fonction de filtrage permet d'éliminer la contribution du tourbillon. On remarque que la partie de l'*upwash* positive sur la coupe C-C contient encore l'influence du tourbillon. Ces fluctuations de vitesse ne peuvent cependant pas être corrigées avec la méthode actuelle. Une correction

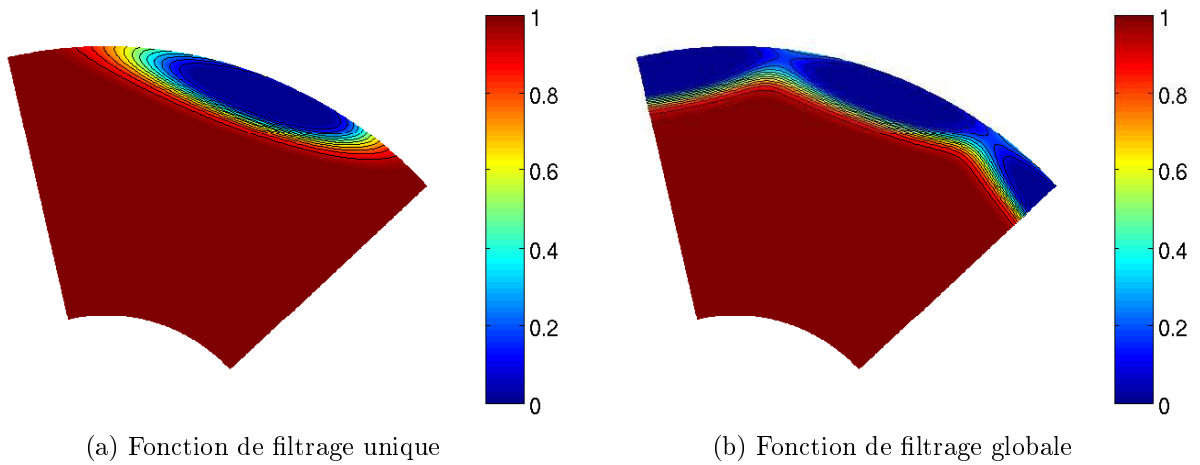


Figure 2.22 Valeur de la fonction filtrage utilisée pour la FL05/AL05. La fonction gaussienne f_1 est utilisée.

du même type que l'éq. (2.72) permettrait d'améliorer l'élimination du tourbillon sur la coupe C-C ainsi que sur la coupe D-D.

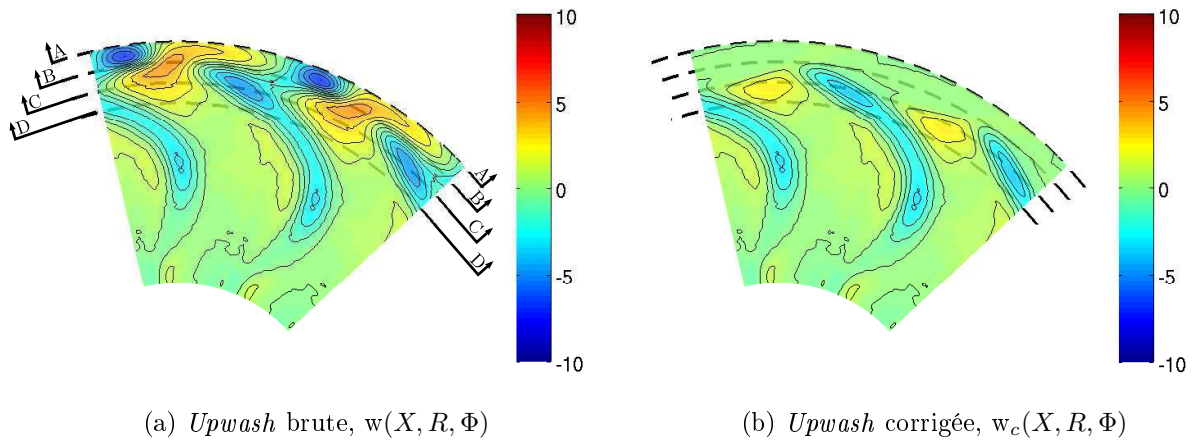


Figure 2.23 *Upwash* résultante avec ou sans filtrage du tourbillon. La fonction de filtrage est f_1 . Les paramètres d'affichage sont les mêmes que ceux de la figure 2.21.

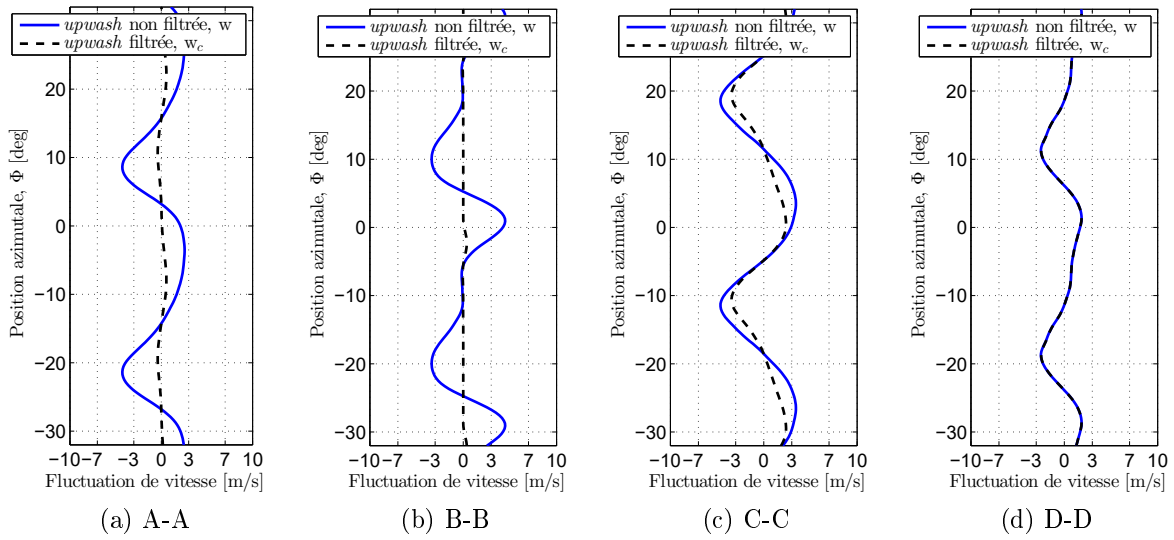


Figure 2.24 Comparaison des *upwash* pour les différentes coupes décrites sur la figure 2.23a, avant et après filtrage.

2.4 Modélisation des sillages turbulents

2.4.1 Description d'un sillage turbulent

La viscosité du fluide implique que l'écoulement à la surface des pales est nul. Le sillage est alors la continuation des couches limites sur une pale convecté par l'écoulement principal [139]. Le sillage est constitué de deux parties : une déterministe et une turbulente. La première provient directement de la présence de la pale dans l'écoulement et a été indirectement traitée dans la section précédente. La deuxième provient du fait que la couche limite d'une pale de DHCR est turbulente à cause du nombre de Reynolds de l'écoulement.

Il est important de préciser que le tourbillon d'extrémité à lui aussi une partie turbulente qui ne sera pas directement traitée dans ce manuscrit. La partie turbulente du tourbillon d'extrémité sera pour le moment traitée de la même manière que les sillages turbulents.

Dans un premier temps, les caractéristiques principales des sillages turbulents seront présentées. À partir de ces définitions, différents modèles semi-empiriques utilisés dans la littérature seront décrits dans un second temps. Pour finir, les grandeurs caractéristiques, présentées pour chacun des modèles, seront extraites sur la configuration FL05/AL05.

2.4.2 Éléments de la modélisation des sillages turbulents

À partir des résultats expérimentaux provenant d'anémomètres à fils chaud en rotation synchrone derrière un rotor, Reynolds et Lakshminarayana [124] montrent que l'intensité de la turbulence est maximale au centre du sillage. Cette intensité turbulente décroît de manière monotone en dehors de ce maximum. Sur cette base, Ventres *et al.* [159] proposent de décomposer la turbulence provenant des sillages. Si $u(\mathbf{x}, t)$ est la fluctuation de vitesse turbulente unidirectionnelle dans le repère déroulé \mathfrak{R}_w alignée avec le calage des pales amont et présentée dans la section 1.5 alors :

$$u(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}, t), \quad (2.73)$$

où $f(\mathbf{x}, t)$ est une fonction à déterminer. Celle-ci module alors la vitesse turbulente $w(\mathbf{x}, t)$. Puisque dans un sillage la vitesse turbulente est maximale au centre du sillage alors $f = 1$ au centre du sillage. Ventres *et al.* [159] proposent une approche où les sillages ne se superposent pas. Ainsi, si L_w est la demi-largeur du sillage, B_1 le nombre de pales du rotor amont et $R_{1,hub}$ le rayon du rotor amont au niveau du moyeu, alors les sillages respectent le critère :

$$\frac{L_w B_1}{\pi R_{1,hub}} < 1. \quad (2.74)$$

Cette relation indique que la largeur du sillage $2L_w$ ne doit pas être plus grande que l'écart minimum entre deux pales du rotor amont. f est alors nulle entre deux sillages. La demi-largeur du sillage L_w est extraite dans la direction \mathbf{e}_{xc1} en considérant l'énergie cinétique turbulente k pour $k = 0.5k^{max}$ à différents rayons d'extraction.

Cette approche suppose aussi que la turbulence hors des sillages est nulle, ce qui en pratique n'est pas le cas. Pour prendre en compte cette vitesse turbulente, on pourrait supposer que la vitesse turbulente totale s'écrit : $u = u_{wake} + u_{bck}$; u_{wake} serait alors la vitesse turbulente liée au sillage et u_{bck} serait liée à la turbulence de l'écoulement. Cette approche est déjà implémentée pour les turbomachines carénées dans les travaux de Nallasamy et Envia [109] et Soulat *et al.* [143]. Les deux vitesses turbulentes sont globalement décorrélées d'où la sommation simple de ces deux termes.

Finalement, la modélisation d'un sillage turbulent nécessite de caractériser d'une part l'enveloppe de la turbulence, et d'autre part de modéliser la vitesse turbulente au centre du sillage.

Modulation de la turbulence

Dans le repère relatif au rotor amont $\mathfrak{R}_w = (\mathbf{X}_{R2}, \mathbf{e}_{xc1}, \mathbf{e}_{yc1}, \mathbf{e}_{zc1})$, si l'on néglige l'effet des pales aval sur la déformation du sillage alors la fonction f dépend uniquement de la position $\mathbf{x} = (x, y, z)_{\mathfrak{R}_w}$. La demi-largeur du sillage L_w dépend du rayon d'extraction (z) ainsi que de la distance par rapport au bord de fuite de la pale amont (x). La fonction f , à un rayon fixé et au niveau du bord d'attaque des pales aval, se décrit alors uniquement en fonction de y .

La figure 2.25 présente les deux fonctions de modulation utilisées dans la littérature : le sinus cardinal carré et la fonction gaussienne [63, 143]. Le centre du sillage est supposé être en $y = 0$. Ces fonctions sont valables pour un unique sillage et s'écrivent alors formellement :

$$f_{1,g}(y) = \exp\left(-\ln(2)\left(\frac{y}{L_w}\right)^2\right), \quad f_{1,s}(y) = \left(\frac{L_w \sin(1,4y/L_w)}{1,4y}\right)^2, \quad (2.75)$$

respectivement pour la gaussienne et le sinus cardinal carré. Les facteurs $\ln(2)$ et 1,4 dans les fonctions de modulation sont des choix arbitraires permettant d'avoir la valeur $f_{1,*}(L_w) = 0,5$ [13].

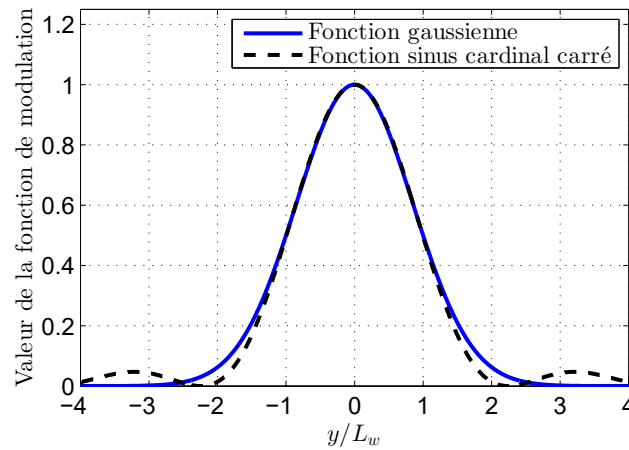


Figure 2.25 Fonctions de modulation utilisées dans la littérature pour un sillage unique, dont le centre est en $y = 0$.

On remarque que, contrairement aux expériences de Reynolds et Lakshminarayana [124] où l'intensité de la turbulence décroît de manière monotone, le sinus cardinal présente des fluctuations non physiques loin du centre du sillage. Pour cette raison, on n'utilise le sinus cardinal que dans sa partie centrale. Dans le but de coller à la méthodologie proposée par Blandeau [13] et Kingan [79], le modèle gaussien sera utilisé.

Vitesse turbulente incidente

La modélisation de la vitesse turbulente incidente requiert la manipulation d'outils stochastiques. En effet, la turbulence est un processus aléatoire, par conséquent la modélisation de $w(\mathbf{x}, t)$ s'effectue de manière indirecte.

Les premières méthodes trouvées dans la littérature consistent à utiliser la notion d'autocorrélation dans un premier temps, puis à utiliser la transformation de Fourier pour exprimer le comportement de la vitesse dans le domaine spectral. Pour une étude détaillée de la turbulence grâce à ce principe le lecteur pourra se référer à Pope [118].

Dans la suite, la vitesse turbulente est supposée :

Hypothèses :

- stationnaire,
- homogène,
- isotrope,
- ergodique.

La turbulence est stationnaire (hypothèse de Taylor) si ses propriétés ne changent pas au cours du temps. Il s'avère que la prévision acoustique est modifiée si la turbulence varie pendant sa convection du bord d'attaque au bord de fuite des pales aval [34]. Cependant, Dieste et Gabard [34] montrent aussi que cet effet est négligeable pour des nombres de Mach inférieurs à ceux rencontrés pour des DHCR. De plus, Moreau *et al.* [107] ont montré que la géométrie du bord d'attaque de la pale aval déforme la turbulence incidente et réduit la susceptibilité acoustique en hautes fréquences. Cependant, pour que cet effet soit significatif le profil d'aile est nécessairement épais, ce qui n'est pas le cas des pales de DHCR.

La turbulence est homogène si ses propriétés ne changent pas suivant la position choisie. Pour le sillage, l'hétérogénéité de la turbulence est modélisée à travers la fonction de modulation précédemment décrite.

La turbulence est isotrope si ses propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.

Pour finir, la turbulence est ergodique si les propriétés statistiques peuvent être obtenues avec une seule réalisation. Cependant, cette réalisation doit être assez longue pour inclure toutes les informations stochastiques du phénomène.

Dans le repère $\mathfrak{R}_w = (\mathbf{X}, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})$ tournant avec le rotor amont, la vitesse turbulente est portée par une vitesse moyenne \mathbf{U} et est modélisée au centre du sillage au niveau du bord d'attaque des pales aval. L'autocorrélation de la vitesse turbulente dans la direction de la convection se définit comme :

$$R_{ww}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) dt = \mathbb{E}(w(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)), \quad (2.76)$$

où $\mathbb{E}(\cdot)$ est l'opérateur d'espérance mathématique d'un processus stochastique et \mathbf{r} est le vecteur déplacement utilisé pour calculer l'autocorrélation de la vitesse turbulente. R_{ww} est écrit dans le domaine spectral par transformation de Fourier dont les conventions sont :

Convention : soit $f(t)$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . La transformée de Fourier directe temporelle s'écrit :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.77)$$

et ainsi la transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.78)$$

Pour les transformées de Fourier spatiales tridimensionnelles ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}$) on utilise les conventions suivantes :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \text{ et } f(\mathbf{x}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (2.79)$$

Le spectre en nombres d'onde de la vitesse turbulente s'obtient par transformation de Fourier spatiale de l'autocorrélation de la vitesse turbulente (équ. (2.76)) :

$$\Phi_{ww}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} R_{ww}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (2.80)$$

qui pour une turbulence homogène s'écrit plus simplement $\Phi_{ww}(\mathbf{k})$ ou $\Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z)$; k_x est le nombre d'onde dans la direction de la convection et (k_y, k_z) sont les nombres d'onde transverses. Le lien entre la transformée de Fourier de l'éq. (2.76) et Φ_{ww} est :

$$\mathbb{E}(\tilde{w}(\mathbf{k}, t)\tilde{w}(\mathbf{k}', t)) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\Phi_{ww}(\mathbf{k}). \quad (2.81)$$

Puisque la turbulence est tridimensionnelle, le spectre de vitesse unidimensionnel est généralisé en 3D. Il s'écrit alors Φ_{ij} avec i et j une des trois directions du repère \mathfrak{R}_w . Φ_{ij} est un tenseur qui représente une grande quantité d'information à extraire du fluide. En pratique, on extrait l'énergie cinétique turbulente $E(|\mathbf{k}|)$ qui est une fonction scalaire représentative de la turbulence. De plus, pour une turbulence isotrope, celle-ci est reliée directement aux spectres des vitesses incidentes par Pope [118] :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(|\mathbf{k}|)}{4\pi|\mathbf{k}|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right), \quad (2.82)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. Le comportement de $E(|\mathbf{k}|)$, pour une turbulence homogène, s'explique par le principe de la cascade d'énergie turbulente décrite par Moreau *et al.* [105] et respecte les hypothèses de Kolmogorov. Le spectre de l'énergie cinétique turbulente comporte trois régions différentes. La première région, appelée région de production, concerne les structures turbulentes de tailles similaires aux solides générant l'écoulement turbulent. L'énergie cinétique turbulente est ensuite transférée vers des structures turbulentes de plus en plus petites au sein de la région inertielle. Celle-ci est dite inertielle dans le sens où les nombres de Reynolds associés aux tailles des structures turbulentes sont élevés. Cependant, la région inertielle s'arrête lorsque le nombre de Reynolds associé aux structures turbulentes est de l'ordre de 1. À partir de cette échelle, les mécanismes visqueux dissipent l'énergie turbulente.

Le comportement de l'énergie cinétique peut être décrit de manière semi-empirique grâce aux considérations de Kolmogorov. Dans la littérature, les spectres de Von Karman [162] et de Liepmann *et al.* [92] sont utilisés et présentés ci-après.

Modèle de Von Kármán Von Karman [162] propose que le spectre d'énergie cinétique turbulente s'écrive :

$$E(|\mathbf{k}|) = \frac{55}{9\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{\bar{w}^2}{k_e} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_e} \right)^4 (1 + (|\mathbf{k}|/k_e)^2)^{-17/6}. \quad (2.83)$$

où k_e est le nombre d'ondes de transition entre la zone de production et inertielle de la turbulence et est défini par :

$$k_e = \frac{\sqrt{\pi\Gamma(5/6)}}{\Lambda\Gamma(1/3)}, \quad (2.84)$$

où \bar{w}' est la valeur efficace des fluctuations de la vitesse turbulente, Λ représente l'échelle intégrale liée à la turbulence dans la direction de convection et $\Gamma(x)$ est la fonction gamma [1]. Ces paramètres sont définis comme :

$$\frac{3}{2}\bar{w}'^2 = \int_0^{+\infty} E(k) dk \text{ et } \Lambda = \frac{1}{2\bar{w}'^2} \int_0^{+\infty} \frac{E(k)}{k} dk, \quad (2.85)$$

en utilisant les éqs. (2.82) et (2.83), le spectre des vitesses turbulentes dans la direction de l'écoulement s'écrit :

$$\Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z) = \frac{55}{9\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{\bar{w}'^2}{k_e^3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_e^2} \right) (1 + (|\mathbf{k}|/k_e)^2)^{-17/6}, \quad (2.86)$$

avec $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. L'intégration pour un des nombres d'ondes transverses (ici k_z) permet d'obtenir le spectre de Von Kármán bidimensionnel :

$$\Phi_{ww}^{(2)}(k_x, k_y) = \frac{4}{9\pi} \frac{\bar{w}'^2}{k_e^3} \frac{(k_x/k_e)^2 + (k_y/k_e)^2}{(1 + (k_x/k_e)^2 + (k_y/k_e)^2)^{7/3}}. \quad (2.87)$$

Modèle de Liepmann Le modèle proposé par Liepmann *et al.* [92] propose que l'énergie cinétique turbulente se comporte comme :

$$E(|\mathbf{k}|) = \frac{16}{3\pi} \bar{w}'^2 \frac{(\Lambda|\mathbf{k}|)^4}{(1 + (\Lambda|\mathbf{k}|)^2)^3}. \quad (2.88)$$

ce qui permet d'obtenir le spectre bidimensionnel des vitesses turbulentes sous la forme :

$$\Phi_{ww}^{(2)}(k_x, k_y) = \frac{3\bar{w}'^2}{4\pi} \Lambda^2 \frac{\Lambda^2(k_x^2 + k_y^2)}{(1 + \Lambda^2(k_x^2 + k_y^2))^{5/2}} \quad (2.89)$$

La figure 2.26 présente des spectres canoniques obtenus avec les modèles de Liepmann et de Von Kármán. La vitesse de convection de la turbulence (U) varie de 40 à 165 m.s⁻¹ tandis que l'échelle intégrale caractéristique de la turbulence (Λ) et l'intensité de la turbulence (\bar{w}') sont fixées à 0,03 m et 0,04 U m.s⁻¹. Ces spectres sont cohérents avec les résultats de Christophe [23] et Rozenberg [130]. Ces spectres présentent différentes propriétés. Tout

d'abord, on remarque que l'intensité de l'autocorrélation augmente avec la vitesse. Cet effet est principalement dû à \bar{w}' qui augmente de façon proportionnelle avec la vitesse de convection. De plus, on observe que le maximum du spectre se décale vers les hautes fréquences quand on augmente la vitesse de convection. Cet effet provient de la vitesse de convection U réduisant k_x pour une pulsation donnée. La position du maximum du spectre est donc déterminée par l'échelle intégrale de la turbulence et la vitesse de convection des rafales. Moreau et Roger [106] ont introduit une décroissance exponentielle de la turbulence pour les petites échelles. Cette décroissance correspond au passage de la turbulence de la région inertielle à la région visqueuse. On remarque aussi sur la figure 2.26 que si l'on trace $\Phi_{ww}^{(2)}/U^2$ en fonction de $f\Lambda/U$ toutes les courbes se superposent. On obtient alors les courbes de similitude des différents modèles.

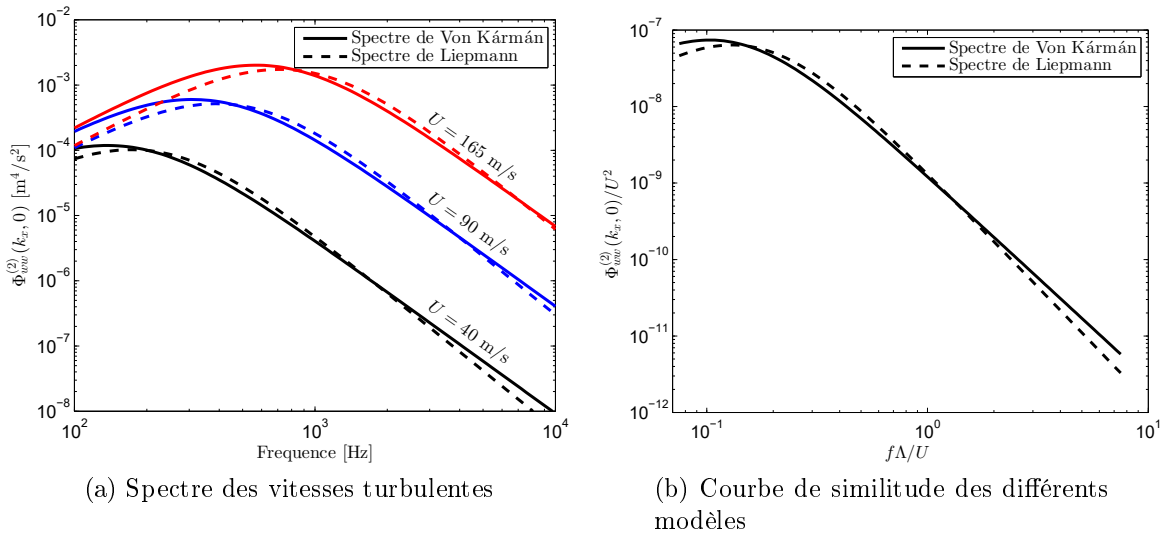


Figure 2.26 Spectres des vitesses turbulentes pour les modèles de Von Kármán et de Liepmann. La vitesse de convection U varie alors que $\Lambda = 0,03$ m et $\bar{w}' = 0,04U$ m.s⁻¹.

2.4.3 Application au cas FL05/AL05

Extraction des paramètres d'entrée

Les paramètres d'entrée sont extraits au niveau du bord d'attaque du rotor aval d'un DHCR. Le plan d'extraction est présenté sur la figure 2.19. En revanche cette fois-ci les variables d'extraction seront les variables turbulentes (k et ω), la demi-largeur des sillages L_w et la vitesse de convection U_{x2} de la turbulence.

Géométrie et écoulement moyen La pale est découpée radialement en différentes *bandes de rayon*. Les paramètres géométriques de corde b_2 , du calage du rotor amont χ_1 , du calage du rotor aval χ_2 et de la flèche du rotor aval Ψ sont extraits à partir de la définition de la géométrie donnée dans l'annexe A.

En ce qui concerne l'écoulement moyen, la norme de la vitesse relative est présentée sur la figure 2.27. En tête de pale la présence du tourbillon se traduit par de fortes variations. En effet l'extraction pour la tête de pale ($\approx 95\%$) coupe le tourbillon puisque les variations de vitesse ressemblent aux extractions de la figure 2.17. La vitesse de l'écoulement moyen est donc définie comme étant la moyenne azimutale du profil de vitesse extrait. On a ainsi :

$$U_{x2}(R) = \frac{B_1}{2\pi} \int_{-\pi/B_1}^{\pi/B_1} |\mathbf{U}_{R2}(R, \Phi)| d\Phi = \langle |\mathbf{U}_{R2}(R, \Phi)| \rangle. \quad (2.90)$$

où $\mathbf{U}_{R2} = (U_X, U_r, U_\phi)_{cyl}$ est la vitesse relative dans le repère du rotor aval et où $\langle . \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne azimutale décrit dans l'équation (2.67). Par conséquent, on suppose que la vitesse relative est dans la direction indiquée par le calage du profil.

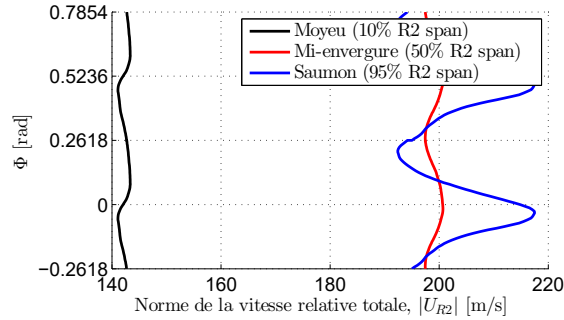


Figure 2.27 Norme de la vitesse relative extraite au bord d'attaque des pales aval pour la configuration FL05/AL05.

Vitesse turbulente La reconstruction de la vitesse turbulente s'obtient grâce aux variables k et ω . Les variations azimutales de ces paramètres sont présentées sur la figure 2.28. On remarque que les variables turbulentes ont un profil gaussien. Ce comportement justifie le choix de la fonction de modulation dans le développement du modèle. Par contre, on remarque que, particulièrement au niveau de la tête de pale, l'hypothèse que k est nulle hors du sillage est fautive. En effet, le niveau minimum de la turbulence est largement supérieur à 0. Dans le futur, à l'image du travail de Nallasamy et Envia [109] ou de ce qui est fait par Sanjosé et Moreau [132], une turbulence de fond devrait donc être appliquée. À chaque rayon, le maximum d'énergie cinétique turbulente k est extrait ainsi que la dissipation turbulente associée ω .

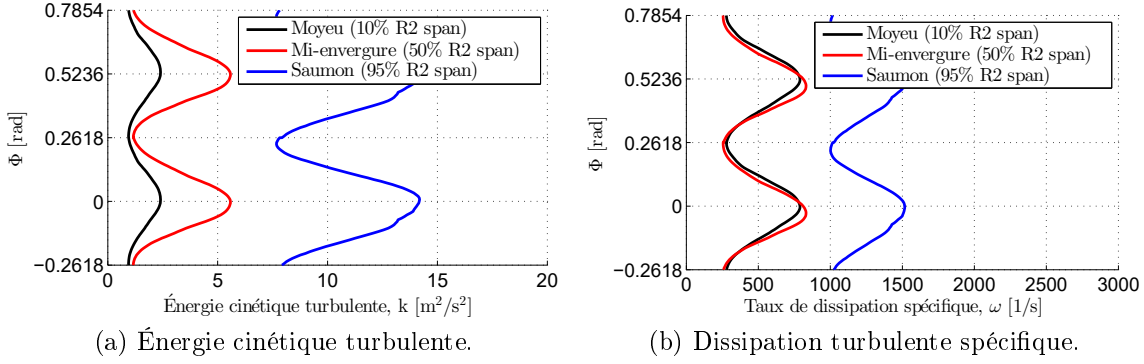


Figure 2.28 Variations azimuthales des paramètres turbulents pour la configuration FL05/AL05.

La valeur efficace de la vitesse turbulente \bar{w}' est obtenue grâce à l'énergie cinétique turbulente. Si l'on suppose que la turbulence est homogène et isotrope alors, suivant Pope [118], on a :

$$\bar{w}'(R) = \max \left(\sqrt{\frac{2}{3} k(R, \Phi)}, \Phi \in [0, 2\pi/B_1] \right). \quad (2.91)$$

De la même manière, on peut reconstruire l'échelle intégrale de turbulence Λ des modèles de turbulence stochastique à partir de la combinaison de k et ω . Pour cela, on utilise une fois de plus une expression proposée par Pope [118] :

$$\Lambda(R) = 0,46 \frac{\sqrt{k(R, \Phi_m(R))}}{C_\nu \omega(R, \Phi_m(R))}, \quad (2.92)$$

où $\Phi_m(R)$ est l'angle utilisé pour calculer \bar{w}' et $C_\nu = 0,09$ est une constante du modèle de turbulence. Le facteur 0,46 fait le lien entre la taille globale des tourbillons et la taille des tourbillons dans la direction de la convection. La demi-largeur des sillages ($L_w(R)$) est obtenue en considérant la distance entre deux points ayant la valeur $\langle k(R, \Phi) \rangle$. À partir de la largeur des sillages, l'échelle intégrale de turbulence Λ peut être reconstruite d'une autre manière en utilisant la loi empirique proposée par Jurdic *et al.* [77] :

$$\Lambda(R) = 0,46(0,5L_w(R)). \quad (2.93)$$

La figure 2.29a présente les extractions de Λ pour le DHCR le long du rayon. Ces résultats utilisent les deux méthodes d'extractions de Λ et sont comparés à l'extraction de ces paramètres pour un DHCR trouvée dans la littérature [112]. Ces valeurs sont notées HeRa 3 du nom de la configuration DHCR utilisée. On remarque que même si les valeurs sont

différentes pour les deux configurations, la variation de Λ est similaire. La seule différence apparaît en tête de pale où la configuration HeRa 3 semble ne pas avoir la signature du tourbillon de tête. Ces écarts proviennent du *clipping* ainsi que du point de fonctionnement différents entre les deux géométries et aussi de la géométrie en soi.

La figure 2.29b illustre l'intensité turbulente \bar{w}'/U_{x2} . On remarque que cette intensité est très faible (1,6 % de la vitesse relative). Celle-ci est aussi très faible comparée à d'autres DHCR de la littérature pour des nombres de Reynolds et de nombres de Mach similaires [112] ou sur des turbomachines [90]. On peut supposer que les variables turbulentes sont trop dissipées au niveau du bord d'attaque de la pale aval. On rappellera que dans le calcul URANS (annexe A) les variables turbulentes sont calculées avec un schéma numérique d'ordre 1 au niveau de la tête de la pale pour limiter les temps de calcul. De plus le modèle de Kok [84] avec limiteur de turbulence pourrait aussi réduire la turbulence produite par les pales. Ces raisons pourraient expliquer la cause des bas niveaux de turbulence au niveau du plan d'extraction.

La figure 2.29c montre la demi-largeur des sillages. On remarque que cette longueur augmente progressivement le long du rayon. Cette augmentation provient de différents mécanismes physiques et numériques [19]. La longueur de la corde, la forme du profil, l'angle d'attaque perçu par la pale ou encore la distance parcourue par le sillage sont les principales causes de la variation de la longueur L_w . Cependant il est important de noter qu'en tête de pale la *demi-largeur* de sillage fait référence aux fluctuations de la vitesse turbulente au cœur du tourbillon et pas dans le sillage. Le modèle BRWI présenté ne prend pas en compte les particularités de la turbulence dans un tourbillon.

La figure 2.29d présente l'évolution du nombre Mach de convection de la turbulence en fonction du rayon. On remarque que la vitesse relative est proche de Mach 0,6 ce qui est relativement élevé même pour une configuration en approche. On remarque aussi que la vitesse de convection est réduite entre 90 et 100 % de l'envergure. Cet effet provient du tourbillon d'extrémité issu du rotor amont.

L'extraction de ces paramètres aérodynamiques permet d'obtenir les spectres des vitesses turbulentes associées. Ceux-ci sont présentés sur la figure 2.30 pour les mêmes rayons d'extraction que la figure 2.28. On observe principalement que le bruit à large bande est maximal pour des fréquences entre 1,5 et 2,5 kHz. On remarque aussi plus distinctement que le spectre de Liepmann atteint son extremum à des fréquences plus élevées que le modèle de Von Kármán. Pour finir, on remarque que l'amplitude des vitesses turbulentes situées au saumon de la pale est supérieure d'un ordre de grandeur aux extractions à des

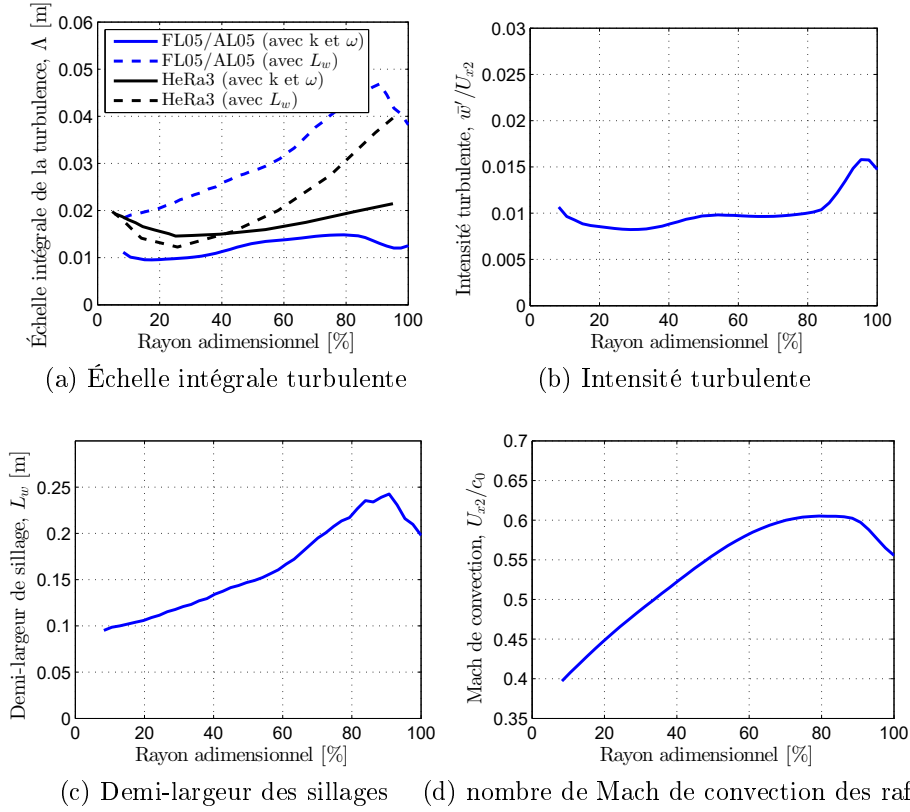


Figure 2.29 Extraction des paramètres aérodynamiques des sillages pour la configuration FL05/AL05 et comparaison aux résultats de Nodé-Langlois *et al.* [112].

rayons plus faibles. Le bruit BRWI sera donc principalement généré par l'extrémité de la pale aval.

En définitive, la modélisation des sillages turbulents s'effectue en 2 parties. Dans une première partie on suppose que l'intensité de la turbulence est modulée par les sillages. Cette modulation s'effectue au travers de fonctions analytiques simples. Dans un deuxième temps, les fluctuations de la vitesse turbulente sont décrites grâce aux modèles semi-empiriques disponibles dans la littérature. Les sillages turbulents sont alors complètement décrits par la combinaison de ces deux modèles. Sur la géométrie FL05/AL05 la fonction de modulation gaussienne des sillages semble être appropriée même si les niveaux de fond de l'énergie cinétique turbulente devraient être pris en compte. De plus, l'amplitude des fluctuations de l'énergie cinétique turbulente laisse penser que la tête de la pale aval sera le principal contributeur du bruit à large bande émis par le rotor aval.

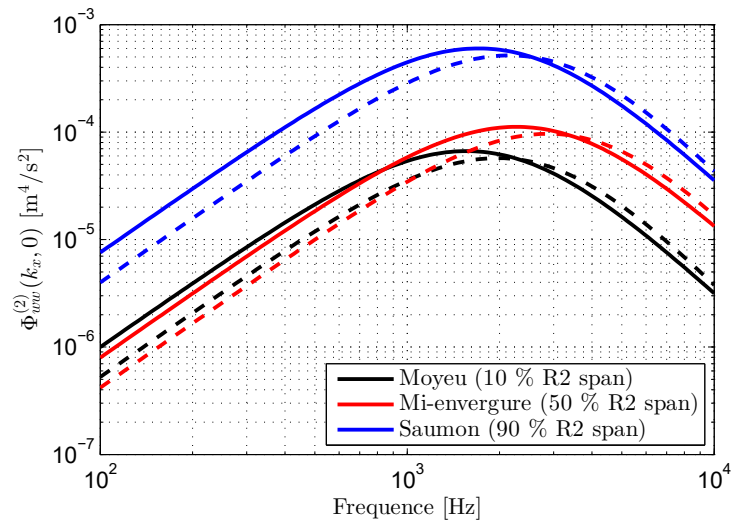
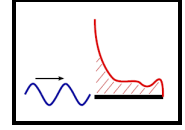


Figure 2.30 Spectres des vitesses turbulentes pour les modèles de Von Kármán (lignes pleines) et de Liepmann (lignes pointillées) calculés aux mêmes rayons d'extraction que sur la figure 2.28.

CHAPITRE 3



CALCUL DES RÉPONSES DE PALE (SOURCES ACOUSTIQUES)

3.1 Introduction

Après avoir modélisé les fluctuations de vitesse de manière analytique, le calcul de la pression instationnaire agissant sur la pale aval est effectué. Comme examiné dans le chapitre 1, la méthode d'Amiet-Schwarzschild (A-S) est utilisée pour calculer le saut de pression instationnaire lié à l'OBVI.

Différentes améliorations de cette méthode ont été proposées au cours du temps. Pour les mécanismes de bord d'attaque, on retrouve notamment des modifications pour prendre en compte une forme trapézoïdale du profil par Carazo [19] ou bien le calcul des itérations d'ordres supérieurs de la solution originale par Santana *et al.* [134].

Dans le cas des mécanismes de bord de fuite, on trouve aussi cette idée de recalculer les itérations d'ordres supérieurs [127], ou bien l'application du problème aux fluctuations de vitesse issues d'un effet potentiel [133].

Dans ce chapitre, on modifiera d'abord les vitesses tourbillonnaires dans le but de décrire les fluctuations de vitesse normale au bord d'attaque de la pale aval. Ensuite, on exposera la méthodologie utilisée pour l'application de la méthode d'Amiet-Schwarzschild dans le cas OBVI. Cette méthodologie permettra la présentation des extensions pour des profils finis en envergure dans un troisième temps. Pour conclure, on appliquera la méthodologie sur un DHCR réaliste.

3.2 Méthodologie

La procédure de calcul des sources acoustiques analytiques implique encore différentes étapes. La figure 3.1 présente la méthodologie pour le calcul des sources acoustiques. Le point de départ provient de la partie précédente. Il s'agit des vitesses azimutales (u_θ) et axiale (u_z) du tourbillon extraites dans le repère du tourbillon \mathfrak{R}_v .

La première étape est de récupérer les paramètres géométriques et cinématiques de l'événement OBVI au niveau du bord d'attaque du rotor aval. À partir de ces paramètres, la

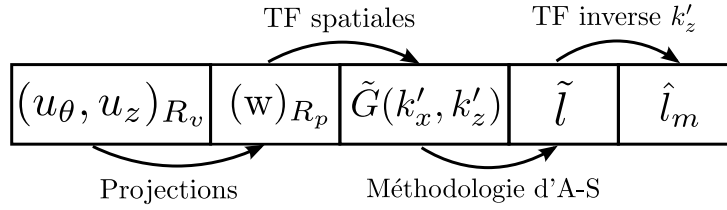


Figure 3.1 Méthodologie pour le calcul des sources acoustiques liées au tourbillon.

fluctuation de vitesse normale à la pale aval (w) est extraite à partir des vitesses tourbillonnaires décrites dans le repère \mathfrak{R}_v . Cette fluctuation de vitesse appelée *upwash* dans la littérature est l'entrée du modèle d'Amiet-Schwarzschild (A-S). Elle est décrite dans le repère lié à la pale aval en mouvement \mathfrak{R}_p .

Les fluctuations de vitesse normale sont ensuite transformées dans le domaine spectral, on en obtient alors une distribution spectrale bidimensionnelle (\tilde{G}). L'*upwash* est définie comme une composition de fonctions sinusoïdales aussi appelées rafales. Une dimension de \tilde{G} pointe dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque (k'_x) tandis que l'autre, orthogonale, caractérise l'obliquité de la perturbation incidente (k'_z) (fig. 2 dans [2]). L'utilisation de modèles de tourbillons simples permet ainsi l'obtention d'un spectre explicite. L'*upwash* associée au tourbillon est reconstitué en sommant les contributions de toutes les rafales obliques.

L'application de la méthode d'A-S s'effectue alors. On obtient le saut de pression (\tilde{l}) qui s'applique pour une pale infinie en envergure. Dans le cadre des mécanismes OBVI, l'impact se situe près du saumon de la pale. Pour cette raison, une correction est ajoutée pour prendre en compte la présence du saumon. La condition aux limites au niveau de l'extrémité de pale n'est pas déterminée de manière exacte. Par conséquent, deux conditions aux limites différentes sont examinées. La nouveauté de ce travail consiste en l'application d'une condition aux limites de type bord d'attaque.

Pour finir, suivant la procédure classique d'Amiet-Schwarzschild, le chargement instationnaire est reconstitué en sommant les contributions de toutes les rafales obliques pour un nombre d'onde dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque (k'_x) [3]. On obtient ainsi l'amplitude du saut de pression relatif à l'impact du tourbillon (\hat{l}_m). L'indice m provient du caractère périodique de l'interaction qui sélectionne certaines fréquences où le chargement est non nul.

Contrairement à l'application de cette méthode pour les sillages (méthode par bandes de rayon), l'événement OBVI est localisé. Il survient au niveau du croisement entre la

trajectoire du centre du tourbillon et le bord d'attaque de la pale aval. La méthode d'A-S est donc appliquée de manière globale. Les effets de variation des paramètres géométriques et cinématiques de la pale aval suivant la direction de l'envergure sont alors négligés.

3.3 Obtention des *upwash*

3.3.1 Projection spatiale

Les fluctuations de vitesse normale à la pale sont obtenues en récupérant tous les paramètres géométriques au niveau du croisement de la trajectoire du tourbillon \mathbf{X}_v avec la pale aval et en utilisant les changements de repères basés sur les définitions données dans la section 1.5. Cette trajectoire croise le bord d'attaque de la pale aval au niveau du point $\mathbf{X}_{VI} = (X_{VI}, R_{VI}, \Phi_{VI})$ en coordonnées cylindriques dans le repère \mathfrak{R}_0 . Au niveau du point \mathbf{X}_{VI} , la corde c_2 , le calage γ_2 et la flèche Ψ du profil sont extraits. L'hélicité φ , l'angle de contraction de la veine fluide β , le rayon du tourbillon r_0 et les vitesses tourbillonnaires $\mathbf{u}_v(r) = (0, u_\theta, u_z)$ dans le repère $\mathfrak{R}_v = (\mathbf{X}_{VI}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ en coordonnées cylindriques sont extraits de la même manière. On remarque que l'angle de flèche Ψ est négligé dans la construction du modèle. φ est reconstruit en utilisant l'éq. (2.62). De manière analogue, l'angle de contraction de la veine fluide (β) est reconstruit en utilisant :

$$\beta = \text{atan}(-a_\beta). \quad (3.1)$$

Le signe $-$ provient des conventions utilisées. Dans le repère lié à la pale $\mathfrak{R}_p = (\mathbf{X}_{VI}, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})$, l'*upwash* est la fluctuation de vitesse dans la direction normale à la pale \mathbf{e}_{yc2} en $y_{c2} = 0$. Elle s'écrit alors :

$$w(x_{c2}, 0, z_{c2}) = u_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{yc2} + u_z(r) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{yc2}. \quad (3.2)$$

On additionne directement les deux vitesses car elles sont orthogonales ($\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z = 0$). Le rayon dans le repère \mathfrak{R}_v est exprimé en fonction des variables du repère \mathfrak{R}_p :

$$r(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) = \sqrt{(c_\beta z_{c2})^2 + \sin(\gamma_2 + \varphi)^2 (x_{c2} - U_c t)^2}. \quad (3.3)$$

Le passage du repère \mathfrak{R}_v au repère \mathfrak{R}_p s'effectue grâce à des matrices de rotation autour du point \mathbf{X}_{VI} . L'ensemble de matrices de rotation est donné dans l'annexe C. Roger *et al.* [128] utilisaient uniquement les angles φ et γ_2 pour obtenir les *upwash*. Au vu des extractions dans le cas de la configuration FL05/AL05 (figure 2.7b) l'angle de contraction de la veine

fluide est rajouté à cette procédure. Cet angle rajoute une rotation avant l'application de l'angle φ . À partir de l'annexe C et de l'expression de la vitesse azimutale de Lamb-Oseen éq. (2.28), on obtient :

$$\begin{aligned} w^{LO}(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) &= u_{\theta}^{LO}(r) \mathbf{e}_{\theta} \cdot \mathbf{e}_{y_{c2}} \\ &= \frac{u_{\theta}^{max} r_0}{(1 - e^{-\alpha^2})} \frac{(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)})}{r^2} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec $C_{span} = (\cos \beta + \tan \beta) \cos(\varphi + \gamma_2)$ et $C_{chord} = \sin^2(\varphi + \gamma_2) \sin(\beta)$. Les indices *span* et *chord* sont choisis à cause des projections liées à la direction de la corde (x_{c2}) ou de l'envergure (z_{c2}). $c_{\beta} = \sqrt{1 + \tan^2(\beta)}$ est le coefficient modifiant le rayon à cause de la contraction de la veine fluide. La vitesse $U_c = \Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) / \sin(\gamma_2 + \varphi)$ est la vitesse de phase des fluctuations dans la direction de la corde. La vitesse de rotation est la vitesse relative définie pour les DHCR $|\Omega_1| + |\Omega_2| = \Omega$. Cette vitesse est choisie car le tourbillon est décrit dans le repère du rotor amont. On remarque que U_c ne coïncide pas avec la vitesse relative, obtenue grâce au triangle des vitesses. Cependant, dans un premier temps, on considère que ces deux vitesses sont identiques. Pour la configuration FL05/AL05, la vitesse de convection des rafales sinusoïdales vaut 167 m.s^{-1} . Cette vitesse s'avère proche de la vitesse relative de la pale aval extraite en utilisant la CFD ($|\mathbf{U}_{rel}| = 175 \text{ m.s}^{-1}$) en amont du point \mathbf{X}_{VI} . Le cas échéant, un facteur de correction peut être utilisé comme suggéré par Roger et Moreau [127]. Pour les autres modèles de vitesse azimutale, les modèles de Scully et de Taylor conduisent respectivement à :

$$\begin{aligned} w^{Sc}(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) &= \frac{V_{\theta}^{max} \sqrt{2}}{r_0} \frac{1}{((r/r_0)^2 + 1)} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] \\ w^{Ta}(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) &= \frac{V_{\theta}^{max}}{r_0} e^{1-r/r_0} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pour le cas où il n'y a pas de contraction de la veine fluide ($\beta = 0$), les formules ci-dessus redonnent exactement les formules proposées par Roger *et al.* [128][éq. (1)]. Pour la vitesse axiale, on obtient de la même manière :

$$w^{Ga}(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) = \cos \beta \sin(\gamma_2 + \varphi) u_z^{max} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right). \quad (3.6)$$

Dans la formulation d'Amiet [8], les fluctuations de vitesse incidente sont supposées être des rafales sinusoïdales (rafales de Sears [7]). Les formules précédentes seront donc écrites dans le domaine spectral.

3.3.2 Passage dans le domaine spectral

En utilisant les développements indiqués dans l'annexe C, on calcule les transformées de Fourier des *upwash* pour les modèles choisis. L'avantage des modèles de vitesses purement analytiques est que la transformée de Fourier est elle aussi analytique. On obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{w}^{LO}(x_{c2}, 0, z_{c2}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{LO}(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{-u_{\theta}^{max} r_0}{1 - e^{-\alpha^2}} \frac{e^{-ik_x x_{c2}}}{4U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \left[C_{\text{span}} \frac{h(-z_{c2}) - h(z_{c2})}{c_{\beta}} + iC_{\text{chord}} \frac{h(-z_{c2}) + h(z_{c2})}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right],\end{aligned}\quad (3.7)$$

avec :

$$h(z_{c2}) = e^{ik_x z_{c2} / \sin(\varphi + \gamma_2)} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{k_x r_0}{2 \sin(\varphi + \gamma_2)} + \frac{z_{c2}}{r_0} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Si l'on suppose que chaque pale amont crée le même tourbillon à son extrémité les événements OBVI sont identiques, on décrit l'ensemble des tourbillons qui interagissent une pale aval comme une somme. Cette somme est infinie dans le repère déroulé et vaut :

$$f_w(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(x_{c2}, 0, z_{c2}, t - m\Delta t) = w(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) \star \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m\Delta t), \quad (3.9)$$

avec Δt l'écart de temps entre 2 événements OBVI :

$$\Delta t = \frac{2\pi}{B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)}. \quad (3.10)$$

B_1 est le nombre de pales du rotor amont. On a réécrit la série infinie en utilisant le produit de convolution et par application de la transformation de Fourier on obtient :

$$\tilde{f}_w(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{\Delta t} \tilde{w}(x_{c2}, 0, z_{c2}, \omega) \delta(\omega - m2\pi/\Delta t). \quad (3.11)$$

On observe sous cette formulation qu'en pratique l'ensemble des tourbillons impactant la pale sélectionne des pulsations discrètes $\omega_m = m2\pi/\Delta t$. Ces pulsations discrètes sont les harmoniques de charge du profil tel qu'étudié dans la littérature des DHCR [20, 66, 140]. Suivant la méthodologie formulée par Amiet [3] on décompose les rafales incidentes en rafales sinusoïdales dans la direction de la corde x_{c2} et de l'envergure z_{c2} . Les *upwash* incidentes s'écrivent donc comme un spectre spatial bidimensionnel $\tilde{G}(k_x, k_z)$ dont la définition

est :

$$\tilde{G}(k_x, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{w}(x_{c2}, 0, z_{c2}, \omega) e^{-ik_x x_{c2}}] e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}. \quad (3.12)$$

Là encore, en accélérant les étapes calculatoires décrites dans l'annexe C, les modèles analytiques des vitesses utilisées donnent une expression de \tilde{G} explicite :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{LO}(k_x, k_z) &= \frac{iC_{amp}^{LO}}{2\pi U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \left[\frac{C_{span} k_z}{c_\beta} - \frac{C_{chord} 2ab k_x}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right] \frac{e^{-a^2 k_x^2 - \frac{k_z^2}{4b^2}}}{(2ab k_x)^2 + k_z^2}, \\ \tilde{G}^{Sc}(k_x, k_z) &= -\frac{C_{amp}^{Sc} r_0^2}{4\pi U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \left[-k_z C_{span} + \frac{k_x C_{chord}}{c_\beta \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right] \\ &\times \frac{2ir_0}{\sqrt{k_z^2 + c_\beta^2 k_x^2 / \sin^2(\varphi + \gamma_2)}} K_1 \left(\frac{r_0}{c_\beta} \sqrt{k_z^2 + \frac{c_\beta^2 k_x^2}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)}} \right), \\ \tilde{G}^{Ta}(k_x, k_z) &= \frac{C_{amp}^{Ta} \sqrt{2\pi} r_0^2}{c_\beta} \left[\frac{r_0 k_z C_{span}}{c_\beta^2 \sqrt{2\pi}} - \frac{r_0 k_x C_{chord}}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right] e^{\frac{-r_0^2 k_z^2}{2c_\beta^2}}, \\ \tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z) &= \frac{u_z^{max} \cos(\beta) r_0}{4\pi U_c c_\beta} \frac{r_0}{\sqrt{2} c_\beta} \exp \left[-\left(\frac{k_x r_0}{2 \sin(\varphi + \gamma_2)} \right)^2 - \left(\frac{k_z r_0}{2 c_\beta} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

où C_{amp}^{LO} , C_{amp}^{Sc} et C_{amp}^{Ta} sont respectivement égaux à $u_\theta^{max} r_0 / (1 - \exp(-\alpha^2))$, $u_\theta^{max} \sqrt{2} / r_0$ et $u_\theta^{max} \exp(1/2) / r_0$. $a = r_0 / (2\sqrt{\alpha} \sin(\varphi + \gamma_2))$ et $b = \alpha c_\beta / r_0$ sont reliés respectivement aux développements dans la direction de la corde et de l'envergure pour le tourbillon de Lamb-Oseen. K_1 est la fonction de Bessel de seconde espère et d'ordre 1 [1]. Toujours grâce à l'orthogonalité des vitesses et aux propriétés linéaires de la transformée de Fourier, le spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes composé de la fluctuation de vitesse azimutale et axiale du tourbillon est :

$$\tilde{G}(k_x, k_z) = \tilde{G}^*(k_x, k_z) + \tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z), \quad (3.14)$$

* indiquant le modèle de vitesse azimutale utilisé.

3.4 Utilisation de la méthodologie classique d'Amiet-Schwarzschild

Si l'on écrit les *upwash* (w) à partir de (\tilde{G}) (éq. (3.12)) on a :

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(k_x, k_z) e^{-i\omega t + ik_x x_{c2} + ik_z z_{c2}} dk_z dt. \quad (3.15)$$

On peut alors considérer chaque rafale sinusoïdale $w(x_{c2}, 0, z_{c2}, t) = \tilde{G}(k_x, k_z)e^{-i\omega t + ik_x x_{c2} + ik_z z_{c2}}$ séparément. Cependant à la lumière de la figure 1.14 on remarque que la géométrie de la pale aval contient l'angle de flèche Ψ .

3.4.1 Mise en place

Si l'on souhaite utiliser la méthodologie d'Amiet, on réécrira les variables déterminées dans le repère \mathfrak{R}_p dans le repère de la pale aval avec angle de flèche $\mathfrak{R}_{p'} = (\mathbf{X}_{VI}, \mathbf{e}_{x'c2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{z'c2})$. Cette réécriture finale modifie deux points, à savoir la vitesse de convection et les nombres d'onde des *upwash* incidentes.

Vitesse de convection des rafales Une rafale sinusoïdale est convectée dans la direction x_{c2} à la vitesse U_c (éq. (3.4)). Cependant cette vitesse, à cause de la contraction de la veine fluide β , a deux composantes. La norme de la vitesse des rafales incidentes $|\mathbf{U}_0|$ s'obtient par projection :

$$|\mathbf{U}_0| = \frac{U_c}{\cos \beta}. \quad (3.16)$$

Ainsi toujours à l'aide de la figure 1.14, les composantes de la vitesse dans le repère $\mathfrak{R}_{p'}$ sont :

$$\mathbf{U}_0 = |\mathbf{U}_0| \cos(\Psi - \beta) \mathbf{e}_{x'c2} + |\mathbf{U}_0| \sin(\Psi - \beta) \mathbf{e}_{z'c2} = U_1 \mathbf{e}_{x'c2} + U_2 \mathbf{e}_{z'c2}. \quad (3.17)$$

Cette équation respecte la direction des vitesses illustrée sur la figure 1.14 indiquant qu'un angle β positif induit une vitesse radiale des rafales négative. On remarque que le cas où la vitesse dans la direction $\mathbf{e}_{x'c2}$ est la plus grande correspond au cas où $\Psi = \beta$.

Nombres d'onde incidents Toujours à partir de la figure 1.14 les coordonnées dans le repère $\mathfrak{R}_{p'}$ sont obtenues par rotation :

$$\begin{cases} x_{c2} = \cos \Psi x'_{c2} + \sin \Psi z'_{c2} \\ z_{c2} = -\sin \Psi x'_{c2} + \cos \Psi z'_{c2} \end{cases}. \quad (3.18)$$

Si l'on remplace ces coordonnées dans l'éq. (3.15) on peut définir les nombres d'onde incidents (k'_x, k'_z) :

$$\begin{cases} k'_x = \cos \Psi k_x - \sin \Psi k_z \\ k'_z = \sin \Psi k_x + \cos \Psi k_z \end{cases} . \quad (3.19)$$

Hypothèses

Dans le repère $\mathfrak{R}_{p'}$, on suppose une rafale sinusoïdale $w(x'_{c2}, 0, z'_{c2}, t) = \tilde{G}(k_x, k_z) e^{-i\omega t + ik'_x x'_{c2} + ik'_z z'_{c2}}$ convectée à la vitesse \mathbf{U}_0 . Le problème est schématisé sur la figure 3.2. Si l'on rajoute les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

- petites perturbations $[\tilde{G}(k_x, k_z) \ll |\mathbf{U}_0|]$,
- écoulement compressible non visqueux $[\nu = 0]$,
- profil fin $[c \gg e]$ avec e l'épaisseur maximale,
- profil infini en envergure,
- profil peu chargé aérodynamiquement.

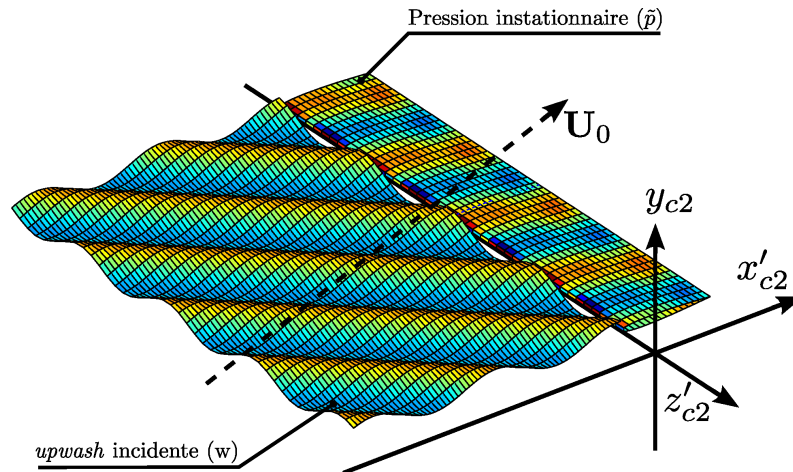


Figure 3.2 Schéma du calcul des sources acoustiques.

La première hypothèse est validée assez rapidement en ne considérant que les fluctuations de vitesse extraites sur la figure 2.15. En effet, les fluctuations de vitesse radiale sont de l'ordre de 30 m.s^{-1} alors que localement la vitesse de convection est de l'ordre de 200

m.s^{-1} . Il existe bien un ordre de grandeur entre les fluctuations et l'écoulement moyen. Cette hypothèse permet de linéariser les équations de Navier-Stokes.

L'hypothèse d'écoulement non visqueux se valide en observant les résultats précédents sur des pales d'hélicoptères [100]. De plus, les méthodes analytiques disponibles de calcul des sources acoustiques liées à l'OBVI dans la littérature ne prennent pas en compte la viscosité [99, 135]. Le caractère compressible de la simulation provient de l'analyse des nombres d'onde en jeu dans les DHCR. Si l'on prend les paramètres de la configuration FL05/AL05 décrit dans le tableau A.1 dans des conditions atmosphériques standards (*i.e* $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$), pour la première harmonique d'interaction, le nombre d'onde acoustique est :

$$k_{1,1} = \frac{B_1\Omega_1 + B_2\Omega_2}{c_0} = \frac{(12 + 10) \times 86.6}{c_0} \approx 5.6 \text{ m}^{-1}, \quad (3.20)$$

on a alors $k_{1,1}c_2 > 1$ avec la longueur de corde c_2 choisi en tête de pale $c_2 = 0,4$ mètres. Cette rapide analyse des paramètres acoustiques montre que dans la direction de la corde le chargement ne peut pas être considéré comme une source compacte. C'est la raison pour laquelle la méthode proposée par Peake [116] n'a pas été retenue malgré son attractivité concernant la prise en compte de l'envergure finie de la pale.

Les pales de DHCR sont des pales relativement fines [146]. Dans la simulation numérique proposée par Falissard *et al.* [45] une épaisseur relative de 4% par rapport à la corde a été retenue. Il s'avère que dans le cas de la géométrie FL05/AL05 l'épaisseur relative de la pale aval vaut 4% au niveau du saumon elle aussi.

L'hypothèse de profil infini en envergure est critique. Cette hypothèse a déjà pu être testée dans le cas des pales d'hélicoptères [150] ou dans un cas canonique par Roger *et al.* [128]. Dans tous les cas présentés, ce paramètre s'est avéré fondamental dans le calcul des sources acoustique et au final sur le bruit rayonné. C'est pour ces raisons que cette hypothèse sera discutée dans les futurs chapitres.

Pour finir l'hypothèse de faible chargement du profil est la plus discutable. En effet, à la lueur des chargements classiques des DHCR [161] et dans le cas de la FL05/AL05, on remarque que le profil est chargé en tête. Au niveau des modèles analytiques, Goldstein et Atassi [58] ont traité le problème avec une pale chargée d'épaisseur non nulle. Ils ont traité le chargement et l'épaisseur du profil en rajoutant un écoulement potentiel au problème initial. Cependant, leur technique est incompressible. Elle ne s'applique donc pas pour des DHCR.

En résumé, les hypothèses pour l'application de la méthode d'A-S sont globalement respectées.

Équations de base

En utilisant les équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement d'Euler linéarisées, on déduit une équation d'onde convectées [eq. (1.61), Goldstein [57]] :

$$\square\phi = \left[\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt} \right] \phi = 0, \quad (3.21)$$

avec ϕ le potentiel de vitesse associé à la perturbation de vitesse $\nabla\phi = u'$ solution de l'éq. (3.21). D/Dt est la dérivée convective. Dans le repère \mathfrak{R}'_p cette dérivée s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x'_{c2}} + U_2 \frac{\partial}{\partial z'_{c2}}, \quad (3.22)$$

en utilisant les vitesses de l'équation (3.17). c_0 est la vitesse du son. Si l'on suppose que ϕ est périodique à la pulsation ω ($\phi = \Phi(x'_{c2}, y'_{c2}, z'_{c2})e^{-i\omega t}$) l'éq. (3.21) développée avec les vitesses U_1 et U_2 donne :

$$\beta_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x'_{c2}} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z'_{c2}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y_{c2}} + 2ik \left(M_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x'_{c2}} + M_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z'_{c2}} \right) - 2M_1 M_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'_{c2} \partial z'_{c2}} + k^2 \Phi = 0, \quad (3.23)$$

avec $\beta_1 = \sqrt{1 - M_1^2}$, $\beta_2 = \sqrt{1 - M_2^2}$ les coefficients de compressibilité dans les directions de x'_{c2} et z'_{c2} respectivement et $M_1 = U_1/c_0$ et $M_2 = U_2/c_0$ les nombres de Mach associés. $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde acoustique. Si le potentiel de vitesse est aussi périodique dans la direction de l'envergure $\Phi = \varphi(x'_{c2}, y_{c2})e^{ik'_z z'_2}$, on obtient :

$$\beta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x'_{c2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y_{c2}} + 2i(kM_1 - M_1 M_2 k'_z) \frac{\partial \varphi}{\partial x'_{c2}} + (k^2 - \beta_2^2 k'_z - 2M_2 k k'_z) \varphi = 0. \quad (3.24)$$

Après cette transformation, on remarque que le terme advectif $\partial/(\partial x'_{c2})$ peut être modifié en utilisant la relation sur les nombres d'onde ($k = M_1 k'_x + M_2 k'_z$). On a :

$$kM_1 - M_1 M_2 k'_z = M_1^2 k'_x. \quad (3.25)$$

On peut alors éliminer cette dérivée convective en utilisant la transformation de Reissner [123] $\varphi' = \varphi(x'_{c2}, y_{c2})e^{iM_1^2 k'_x x'_{c2}/\beta_1^2}$. De cette manière, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 x'^*_{c2}} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 y'^*_{c2}} + \kappa^2 \varphi' = 0, \quad (3.26)$$

avec $(x'^*_{c2}, y'^*_{c2}, z'^*_{c2})$ les coordonnées adimensionnées par la demi-corde du rotor aval $c_2/2$ et par le facteur de compressibilité de l'écoulement dans la direction axiale β_1 :

$$\begin{pmatrix} x'^*_{c2} = \frac{2x'_{c2}}{c_2} & \implies & k'^*_{x2} = \frac{k'_x c_2}{2} \\ y'^*_{c2} = \frac{2\beta_1 y_{c2}}{c_2} & \implies & k'^*_{y2} = \frac{c_2 k_y}{2\beta_1} \\ z'^*_{c2} = \frac{2\beta_1 z'_{c2}}{c_2} & \implies & k'^*_{z2} = \frac{c_2 k'_z}{2\beta_1} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

κ étant un nombre de Helmholtz équivalent. Ce nombre d'onde adimensionnel tient compte des effets de compressibilité et du nombre d'onde dans la direction z'_{c2} :

$$\kappa = \frac{1}{\beta_1} \sqrt{\beta_1^2 \mu^2 - k'^*_{z2}{}^2} = \mu \sqrt{1 - \frac{k'^*_{z2}{}^2}{\beta_1^2 \mu^2}} = \mu \sqrt{1 - \frac{1}{\Theta^{*2}}} \quad (3.28)$$

avec $\mu = k'^*_{x2} M_1 / \beta_1^2$ le nombre de Helmholtz équivalent des rafales sont parallèles au bord d'attaque et Θ^* le paramètre de Graham [62] indiquant l'obliquité des onde incidentes. De cette manière, le comportement d'une quantité irrotationnelle (ici un potentiel de vitesse) dans un écoulement permanent peut se ramener à la résolution d'une équation de Helmholtz.

L'équation (3.26) dont φ' est la solution s'accompagne des conditions aux limites décrites ci-dessous.

Conditions aux limites

Dans le problème décrit, plusieurs conditions physiques sont respectées par la surface de la pale aval. En utilisant l'hypothèse de profils fins, la pale aval est modélisée par une plaque plane infiniment fine. La figure 3.3 présente les conditions aux limites (CL) utilisées dans le problème.

1. Potentiel de vitesse nul en amont de la plaque.
2. Condition de glissement sur la plaque.
3. Saut de pression nul en aval. Cette CL correspond à une condition de Kutta.

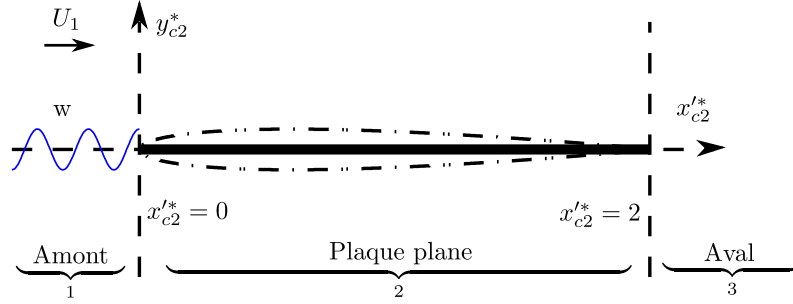


Figure 3.3 Différentes zones pour la définition des conditions aux limites du problème.

Avec les conventions de la figure 3.3, cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \forall x'_{c2} \in]-\infty, 0], \quad \varphi' = 0. \\
 2. \quad & \forall x'_{c2} \in]0, 2[, \quad \left. \frac{\partial \varphi'}{\partial y'_{c2}} \right|_{y'_{c2}=0} = 0. \\
 3. \quad & \forall x'_{c2} \in [2, +\infty[, \quad \Delta \tilde{p} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

La pression instationnaire (\tilde{p}) est reliée au potentiel de vitesse (φ') en utilisant la conservation de la quantité de mouvement linéarisée :

$$\Delta \tilde{p}(x'_{c2}, y'_{c2}) = -\rho_0 \frac{D\varphi'}{Dt}. \tag{3.30}$$

3.4.2 Solution formelle

L'ensemble formé par l'éq. (3.26) et les conditions aux limites formées par les CL (3.29) a été étudié dans la littérature. Amiet [7] propose une solution bidimensionnelle à ce problème donc pour $\kappa = \mu$. Le problème complet a été traité en utilisant la méthode de Wiener-Hopf par Adamczyk [2]. Cette dernière est mathématiquement extensive. Une écriture équivalente à la solution d'Adamczyk [2] a été obtenue par Amiet [8]. Elle est valable pour $M_1 k'_x$ élevé.

Amiet [8] montre que la compressibilité est importante à haute fréquence puisque le comportement de la portance instationnaire passe de $M_1 k'_x{}^{-1/2}$ en incompressible à $M_1 k'_x{}^{-1}$ quand $\mu \rightarrow \infty$.

Le principe de la technique est de séparer les contributions provenant du bord d'attaque de celles provenant du bord de fuite. La résolution de l'éq. (3.26) + CL (3.29) s'effectue de manière itérative. De cette manière, les sous-problèmes résultants peuvent être résolus de la même manière que celui de la diffraction d'une onde électromagnétique avec une

plaque fine semi-infinie. Schwarzschild [136] utilise la solution qui répond aux problèmes de la forme :

Solution de Schwarzschild :

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 Z} + \kappa^2 \varphi' = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi'}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0 & X < 0 \\ \varphi'(X, 0) = F(X) & X > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

La solution s'écrit alors :

$$\varphi'(X, Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(X, \xi, Z) F(\xi) d\xi, \quad (3.32)$$

avec $G(X, \xi, Z)$ la fonction de Green d'une plaque plane semi-infinie. Cette fonction au niveau de l'obstacle ($Z = 0$) vaut [88] :

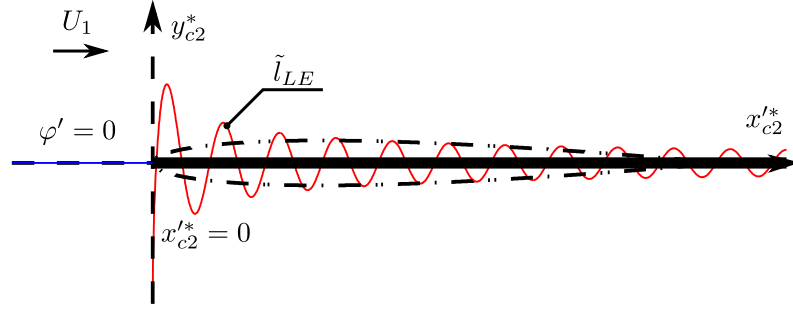
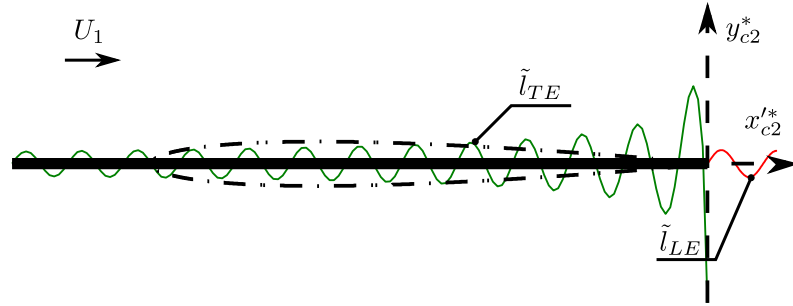
$$G(X, \xi, 0) = \sqrt{\frac{-X}{\xi}} \frac{1}{\xi - X} e^{-i\kappa(\xi - X)} \quad , \quad X < 0. \quad (3.33)$$

Cela explique pourquoi cette technique est souvent appelée la technique d'Amiet-Schwarzschild (A-S). Dans la résolution ci-dessus on modifie $X \rightarrow -x_{c2}'^*$ et $Z \rightarrow y_{c2}'^*$. La figure 3.4 présente la séparation en 2 problèmes de Schwarzschild. La solution présentée est le saut de pression intrados-extrados \tilde{l} qui pour une plaque plane infiniment fine est le double de la pression instationnaire $\tilde{l} = 2\Delta\tilde{p}$.

On cherche tout d'abord un potentiel initial qui annule la rafale incidente sur la plaque complète en utilisant la CL (3.29 - 2.), on a alors :

$$\left. \frac{\partial \varphi'_0}{\partial y_{c2}'^*} \right|_{y_{c2}'^*=0} = -w. \quad (3.34)$$

La première itération (figure 3.4a) consiste à la résolution du problème sur un plan semi-infini ($x_{c2}'^* \geq 0$). On annule le potentiel initial en amont du bord d'attaque en utilisant la solution de Schwarzschild. Le résultat corrige l'itération zéro et donne un potentiel de vitesse φ'_{LE} qui grâce à la conservation de la quantité de mouvement linéarisée de l'éq. (3.30) permet de calculer le saut de pression (\tilde{l}_{LE}).

(a) 1^{er} problème d'Amiet-Schwarzschild.(b) 2^{ème} problème d'Amiet-Schwarzschild.Figure 3.4 Séparation du problème développé par Amiet [8]. Amplitude arbitraire des solutions \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE} .

Le second problème (figure 3.4b) consiste à annuler le saut de pression dans le sillage obtenu par le premier problème (\tilde{l}_{LE}) au-delà du bord de fuite. On respectera donc les CL (3.29 - 2.) et (3.29 - 3.). Cette solution s'appelle \tilde{l}_{TE} . Après application, on obtient la solution suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) &= \frac{A e^{i a_x^* x_{c2}^* + i a_z^* z_{c2}^*}}{\sqrt{\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*}}, \\ \tilde{l}_{TE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) &= \frac{-A}{\sqrt{2}} e^{2i a_x^* / \cos \Psi} e^{i a_x^* x_{c2}^* + i a_z^* z_{c2}^*} \\ &\quad \times [1 - (1 + i) E^* (2\kappa ((\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^* - 2)))] . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les nombres d'onde a_x^* et a_z^* sont obtenus grâce aux éqs. (3.19) :

$$\begin{cases} a_x^* = \sin \Psi k_z'^* - \cos \Psi [\mu M_1 - \kappa] \\ a_z^* = \cos \Psi k_z'^* + \sin \Psi [\mu M_1 - \kappa] \end{cases} . \quad (3.36)$$

Le coefficient d'amplitude A vaut :

$$A = \frac{-2\rho_0 U_1 \tilde{G}(k_x, k_z) e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}} . \quad (3.37)$$

$E^*(X)$ est la fonction de Fresnel conjuguée définie par Abramowitz et Stegun [1] :

$$E^*(X) = \int_0^x \frac{e^{-it}}{\sqrt{2\pi t}} dt. \quad (3.38)$$

Rafales supercritiques et subcritiques

D'après les solutions proposées par l'éq. (3.35), on observe que le terme κ est fondamental. D'après l'éq.(3.26), c'est notamment le signe de κ^2 qui est à étudier. En effet, pour k'_x fixé, tous les nombres d'onde radiaux k'_z sont utilisés pour modéliser l'impact d'un tourbillon. On distingue alors deux cas [62] :

- $\Theta^* > 1$ ou $\beta_1^2 \mu^2 \geq k_z'^2$. Dans ce cas-là κ est réel et l'équation de Helmholtz (eq. (3.26)) est hyperbolique. Par rapport à la ligne de bord d'attaque de la pale aval ($x_{c2}^* = 0, y_{c2}^* = 0$), la vitesse d'un front d'onde dans la direction de l'envergure z_{c2}^* est supersonique. On parle de rafales supercritiques. La solution $\tilde{l} = \tilde{l}_{LE} + \tilde{l}_{TE}$ montre une décroissance lente du chargement instationnaire dans la direction de la corde (lignes pleines, figure 3.5).
- $\Theta^* < 1$ ou $\beta_1^2 \mu^2 < k_z'^2$. Dans ce cas-là κ est imaginaire pur et l'équation de Helmholtz (eq. (3.26)) est elliptique. Par rapport à la ligne de bord d'attaque de la pale aval ($x_{c2}^* = 0, y_{c2}^* = 0$), la vitesse d'un front d'onde dans la direction de l'envergure z_{c2}^* est subsonique. On parle alors de rafales subcritiques. La solution décroît alors exponentiellement depuis le bord d'attaque (lignes en pointillés, figure 3.5).

La figure 3.5 présente le saut de pression réduit ($\sqrt{x_{c2}^*} \tilde{l}$) puisque la solution est singulière d'ordre 1/2 en $x_{c2}^* = 0$.

Il est important de noter que le choix de la branche complexe $\pm i\sqrt{|\kappa^2|}$ pour les rafales subcritiques semble arbitraire, mais est lié à la convention de la transformée de Fourier utilisée dans le problème [31]. Quand la convention est en $+i\omega t$, comme dans la section 2.4.2, la branche positive est choisie.

Pour des rafales subcritiques, les éqs. (3.35) sont modifiées en prenant $i\kappa = i\sqrt{-\kappa^2}$. La fonction de Fresnel doit être généralisée pour des valeurs complexes. On utilise alors la fonction erreur complexe Φ^0 :

$$(1 + i)E^*(X) = 1 - \Phi^0(\sqrt{iX}). \quad (3.39)$$

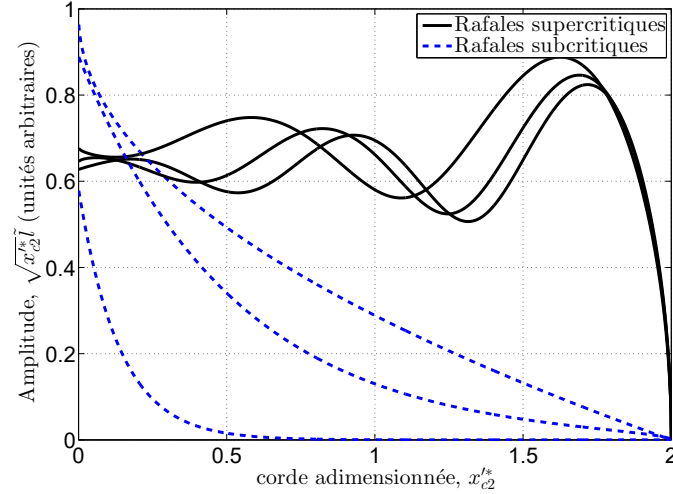


Figure 3.5 Distribution classique du saut de pression instationnaire réduit ($\sqrt{x_{c2}^{js}} \tilde{l}$) pour différentes rafales obliques, lignes pleines : rafales supercritiques, lignes en pointillés : rafales subcritiques.

Obtention des harmoniques de charge \hat{l}_m

Pour finir, les harmoniques de charge des sources acoustiques sont obtenues en combinant le caractère périodique de l'impact OBVI (éq. (3.11)), la description des *upwash* (éq. (3.15)) et la solution formelle (équation (3.35)). Le saut de pression instationnaire l s'écrit alors :

$$l = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{l}(k_x, k_z) dk_z \right] \delta \left(\omega - \frac{m2\pi}{\Delta t} \right) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.40)$$

Cette source acoustique est une série harmonique dont les coefficients \hat{l}_m s'obtiennent grâce à la propriété de la distribution de Dirac :

$$\hat{l}_m = \frac{2\pi}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{l}(k'_{x,m}, k'_z) dk'_z, \quad (3.41)$$

avec $k'_{x,m} = \omega_m/U_1$. L'intégrale suivant les nombres d'onde obliques k'_z sera effectuée numériquement en utilisant la méthode des trapèzes.

3.5 Modification de la condition aux limites à l'extrémité de pale

Différentes approches sont disponibles dans la littérature pour prendre en compte l'envergure finie de la pale. Schlinker et Amiet [135] ont considéré que le chargement en envergure se réduisait en suivant une loi exponentielle empirique. Cette correction est justifiée physiquement par le chargement moyen nul au niveau du saumon. Dans les cas testés, les auteurs n'ont pas trouvé de différences acoustiques entre une pale infinie ou finie en envergure. Au contraire, Tadghighi [150] montre que l'envergure finie de la pale est fondamentale.

L'approche d'A-S a déjà été utilisée pour déterminer une correction d'extrémité au niveau du saumon par Roger *et al.* [128] dans le cas particulier d'un tourbillon rasant le saumon. La CL appliquée est une condition de Kutta. Dans un premier temps, on rappellera les résultats de Roger *et al.* [128] ainsi que la méthodologie employée.

La condition physique pour que le saumon soit considéré comme un bord de fuite est une combinaison entre la géométrie de la pale et le signe de la vitesse U_2 ($U_2 > 0$) [116]. Cependant dans le cas des DHCR, la vitesse U_2 est négative puisque β est positif. La condition aux limites est alors différente. Dans le but d'étudier l'influence de la CL sur une pale d'envergure finie on se propose dans un second temps de considérer l'extrémité de la pale comme un bord d'attaque.

3.5.1 Conditions de type bord de fuite

Puisque l'on cherche à corriger la solution sur la pression statique, deux solutions de Schwarzschild seront calculées. La première est obtenue pour le terme source provenant du bord d'attaque \tilde{l}_{LE} tandis que la deuxième est calculée pour la source provenant du bord de fuite \tilde{l}_{TE} . Pour résoudre le problème au niveau de l'extrémité de la pale, on se ramène à un problème de Schwarzschild dans la direction de l'envergure z_{c2}^* .

Pour cela, les fluctuations du terme source $F(X)$ de l'éq. (3.31) doivent être harmoniques dans la direction transverse. La première étape consistera donc à appliquer une transformation de Fourier dans la direction x_{c2}^* aux solutions \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE} . Cette transformée de Fourier s'avère être explicite pour les deux termes. On appelle ε la variable duale de x_{c2}^* dans le domaine spectral. \hat{l}_{LE} et \hat{l}_{TE} sont les résultats de cette transformation.

Ensuite, si l'on reprend l'équation des ondes convectées (eq.(3.23)) et que l'on suppose que $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{e}_{z_{c2}} = 0$ (écoulement rasant au niveau du saumon) on redéveloppe une équation

de Helmholtz que vérifiera le saut de pression de la correction de tête \hat{l}_t :

$$\frac{\partial^2 \hat{l}_t}{\partial^2 z_{c2}^*} + \frac{\partial^2 \hat{l}_t}{\partial^2 y_{c2}^*} + \kappa_t^2 \hat{l}_t = 0, \quad (3.42)$$

avec $\kappa_t^2 = (k^* - M_0 \varepsilon)^2 - \varepsilon^2$. $M_0 = |\mathbf{U}_0|/c_0$ est la vitesse globale de convection. $k^* = kc_2/2$ est le nombre d'onde acoustique adimensionné.

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{cases} \hat{l}_t = -(\hat{l}_{LE} + \hat{l}_{TE}) & , z_{c2}^* \geq 0, \\ \left. \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial y_{c2}^*} \right|_{y_{c2}^*=0} = 0 & , z_{c2}^* < 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Après application de la solution de Schwarzschild décrite dans la section 3.4.2, on obtient les solutions $\hat{l}_{t,LE}$ et $\hat{l}_{t,TE}$ respectivement pour \hat{l}_{LE} et \hat{l}_{TE} en termes sources :

$$\begin{cases} \hat{l}_{t,LE} = -\frac{(1+i)A}{2 \cos \Psi} \frac{e^{ib^* z_{c2}^*}}{\sqrt{2\pi(a_x^* - \varepsilon)}} \left[1 - \Phi^0(\sqrt{i(\kappa_t + b^*)z_{c2}^*}) \right], \\ \hat{l}_{t,TE} = \frac{iAe^{ia_x^* x_{c2}^* + ia_z^* z_{c2}^*}}{2\pi\sqrt{2}} \frac{e^{2i(a_x^* - \varepsilon)/\cos \Psi}}{a_x^* - \varepsilon} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa \cos \Psi}{2\kappa \cos \Psi(a_x^* - \varepsilon)}} \right\} \\ \quad \times \left[1 - \Phi^0(\sqrt{i(\kappa_t + b^*)z_{c2}^*}) \right], \end{cases} \quad (3.44)$$

avec $b^* = a_z^* + (a_x^* - \varepsilon) \tan \Psi$ le nombre d'onde adimensionnel hydrodynamique du terme source dans la direction x_{c2}^* . La solution finale ($\tilde{l}_t = \hat{l}_{t,LE} + \hat{l}_{t,TE}$) s'obtient en effectuant la transformée de Fourier inverse des fonctions ci-dessus. L'intégration s'effectue de manière numérique. Le problème principal provient de la non-linéarité du terme de phase de la fonction erreur complexe et plus particulièrement le terme κ_t . Puisque \hat{l}_t est complexe il faut faire attention à ne pas intégrer à travers les coupures dans le plan complexe. La figure 3.6 montre que l'intégration s'effectue avec $-\text{sign}(\varepsilon)i\Delta$ pour passer à côté de ces coupures dans le plan complexe.

L'intégration numérique proposée pour l'éq. (3.44) utilise la méthode des trapèzes. On étudie alors la convergence de la solution à intégrer en faisant varier non seulement le pas d'intégration $\delta\varepsilon$, mais aussi les bornes d'intégration N_{lim} puisque l'on calcule une transformée de Fourier inverse. $\varepsilon = a_x^*$ est une singularité d'ordre 1 de la fonction, on intégrera donc autour de cette discontinuité sur l'intervalle $] -N_{lim}, a_x^*[\cup] a_x^*, N_{lim}[$. Les solutions $\tilde{l}_{t,LE}$ et $\tilde{l}_{t,TE}$ annulent exactement le saut de pression des solutions d'A-S pour \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE} au niveau du saumon. Pour estimer l'erreur d'intégration on comparera donc

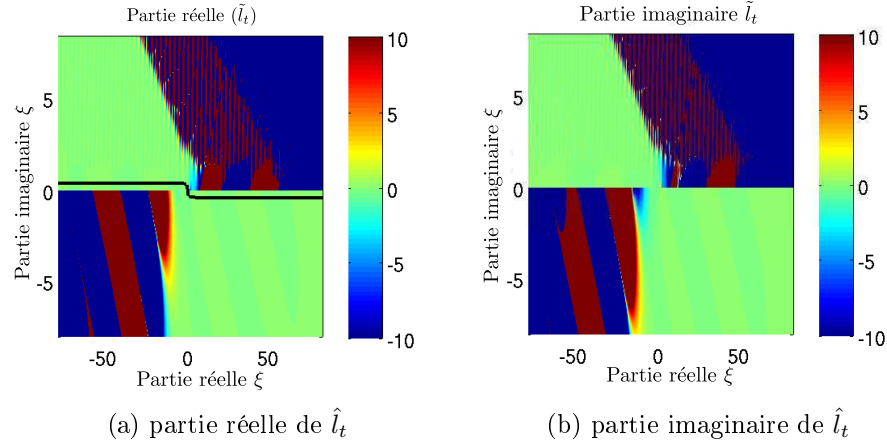


Figure 3.6 Représentation de la solution \hat{l}_t (CL de Kutta) dans le plan complexe pour une rafale supercritique, $M_0 = 0,5$, $\Psi = 20^\circ$, $\mu = 4,18$, $k_z^* = 2,48$ et $z_{c2}^* = -0,5$. Le chemin d'intégration est indiqué sur la figure 3.6a

les deux solutions à cette position radiale. Cependant, la position axiale sur la ligne de saumon x_{c2}^* étant arbitraire, on comparera le saut de pression intégré sur la ligne de saumon. De plus, comme illustré à la figure 3.5, au niveau du bord d'attaque la solution d'A-S diverge. On comparera donc le saut de pression intégré et régularisé au niveau du saumon ($z_{c2}^* = 0$) :

$$\hat{L} = \int_0^{2/\cos \Psi} \sqrt{\cos \Psi x_{c2}^*} \hat{l} dx_{c2}^*, \quad (3.45)$$

pour la solution en envergure infinie et \hat{L}_t la correction d'extrémité. La figure 3.7 présente l'évolution de l'erreur relative $((\hat{L}_t - \hat{L})/\hat{L})$ en fonction du pas d'intégration. On remarque que malgré la singularité en $\varepsilon = a_x^*$ l'intégration numérique converge vers une valeur finie. La croix noire correspond au choix d'intégration pour tous les résultats ci-après. En utilisant les paramètres $N_{lim} = 100k^*$ et $\delta\varepsilon = 0,07k^*$, on assure une intégration précise à 10% près pour l'application d'OBVI des DHCR. Le temps d'intégration est ainsi limité ($< 10^{-2}$ sec. par rafale oblique et position (x_{c2}^*, z_{c2}^*) fixée).

3.5.2 Condition de type bord d'attaque

L'application d'une condition aux limites de type bord d'attaque s'effectue en annulant le potentiel de vitesse au-delà du saumon. La première nouvelle étape sera donc d'obtenir φ'_{LE} et φ'_{TE} , les potentiels de vitesse reliés à \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE} au travers de l'équation (3.30).

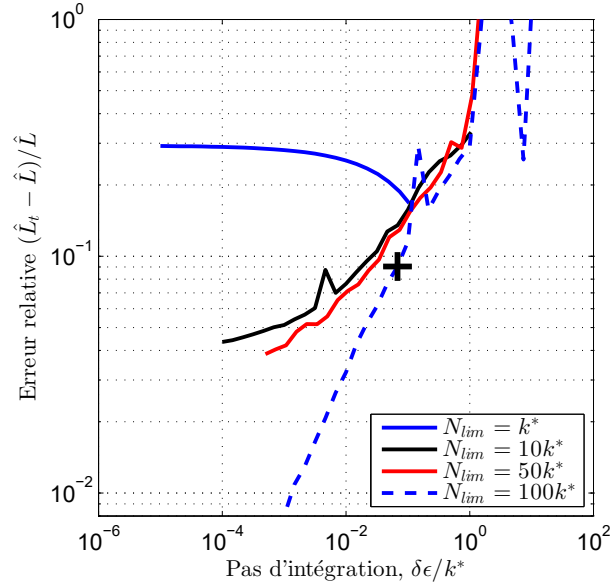


Figure 3.7 Convergence de l'intégration numérique. Les paramètres cinématiques de la rafale incidente sont illustrés sur la figure 3.6. La croix indique la sélection des paramètres d'intégration pour la suite du développement.

La même transformation spectrale ($x_{c2}^* \rightarrow \varepsilon$) est ensuite appliquée sur les potentiels de vitesse. On obtient donc les potentiels de vitesse harmoniques $\hat{\varphi}'_{LE}$ et $\hat{\varphi}'_{TE}$. L'équation des ondes convectées est la même que pour l'application du problème de Schwarzschild général (équation (3.23)).

Cependant, cette fois-ci les conditions aux limitess sont :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}'_t = -(\hat{\varphi}'_{LE} + \hat{\varphi}'_{TE}) & , z_{c2}^* \geq 0, \\ \left. \frac{\partial \hat{\varphi}'_t}{\partial y_{c2}^*} \right|_{y_{c2}^*=0} = 0 & , z_{c2}^* < 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Les solutions sont obtenues après application de la solution de Schwarzschild et passage du potentiel à la pression ($\hat{l}_t = \hat{l}_{t,LE} + \hat{l}_{t,TE}$) en utilisant l'éq. (3.30) encore une fois. Au

final on obtient :

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_{t,LE} &= \frac{-i\hat{\Phi}_{LE}^{\diamond}(\varepsilon)\rho_0c_0}{b} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} e^{-ik_z^* M_z^2 z_{c2}^* / \beta_z^2} \left\{ (M_z((\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi - k_z^*) + k^* - M_x \varepsilon) \right. \\
 &\times \left[1 - \Phi^0(\sqrt{-i(\kappa_s + \kappa_t^*) z_{c2}^*}) \right] e^{-i\kappa_s z_{c2}^*} + (1+i) \sqrt{\frac{(\kappa_s + \kappa_t^*)}{2\pi z_{c2}^*}} e^{i\kappa_t^* z_{c2}^*} \left. \right\}. \\
 \hat{l}_{t,TE} &= \frac{-i\hat{\Phi}_{TE}^{\diamond}(\varepsilon)\rho_0c_0}{b} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} e^{-ik_z^* M_z^2 z_{c2}^* / \beta_z^2} \left\{ (M_z((\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi - k_z^*) + k^* - M_x \varepsilon) \right. \\
 &\times \left[1 - \Phi^0(\sqrt{-i(\kappa_s + \kappa_t^*) z_{c2}^*}) \right] e^{-i\kappa_s z_{c2}^*} + (1+i) \sqrt{\frac{(\kappa_s + \kappa_t^*)}{2\pi z_{c2}^*}} e^{i\kappa_t^* z_{c2}^*} \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

avec $\hat{\Phi}_{LE}^{\diamond}(\varepsilon)$ et $\hat{\Phi}_{TE}^{\diamond}(\varepsilon)$ définis dans l'annexe D. κ_t^* est le nombre d'onde des *upwash* incidentes dans la direction de l'envergure et κ_s est le nombre d'onde associé au problème de Schwarzschild de l'éq. (3.46) :

$$\kappa_t^* = \sqrt{\frac{1}{\beta_z^2} (\beta_z^2 \mu_z^2 - \varepsilon^2)}, \quad \kappa_s = -\frac{(k^* - M_x \varepsilon) M_z}{\beta_z^2} - k_z^* + (\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi. \tag{3.48}$$

Identiquement à la condition de Kutta, l'étude de la fonction \hat{l}_t se fait dans le plan complexe. Sur la figure 3.8, on observe qu'il faudra prendre le chemin d'intégration opposé à la correction de type bord de fuite ($\text{sign}(\varepsilon)i\Delta$). Cette fois-ci encore la correction d'extrémité complète \tilde{l}_t sera obtenue par transformée de Fourier inverse dans la direction x_{c2}^* .

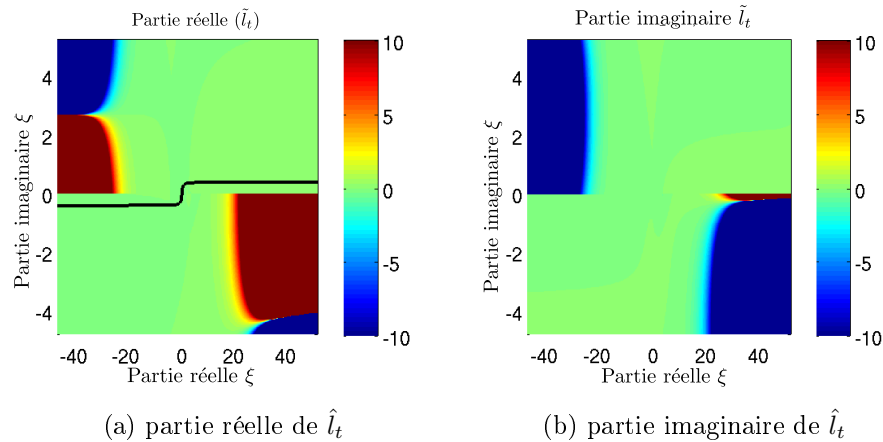


Figure 3.8 Représentation de la solution \hat{l}_t (CL de bord d'attaque) dans le plan complexe pour une rafale supercritique, $M_0 = 0,5$, $\Psi = 20^\circ$, $\mu = 4,18$, $k_z'^* = 2,48$ et $z_2^* = -0,5$. Le chemin d'intégration est indiqué sur la figure 3.8a.

3.6 Validation sur la configuration FL05/AL05

3.6.1 Calcul des *upwash*

Solution pour un tourbillon 2D

Tourbillon de Lamb-Oseen classique En utilisant les paramètres géométriques et cinématiques du tourbillon provenant de la pale amont extraits dans le chapitre 2 et les paramètres géométriques et cinématiques de la pale aval extraits dans la section 3.3, les spectres bidimensionnels sont calculés. La figure 3.9 présente les spectres obtenus avec un tourbillon de Lamb-Oseen comme modèle de tourbillon.

La figure 3.9a est caractéristique de la distribution spectrale des tourbillons utilisant uniquement la vitesse azimutale. On remarque deux lobes symétriques par rapport à la ligne $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. On remarque que la particularité du tourbillon est qu'il n'admet que des rafales obliques. En effet pour $k_z = 0 \text{ m}^{-1}$ la valeur de \tilde{G} vaut zéro. La distribution présentée sur la figure 3.9a est en adéquation avec les résultats préalablement obtenus par Roger *et al.* [128].

La figure 3.9b quant à elle montre la valeur complexe de $\tilde{G}^{LO}(k_x, k_z)$ pour un nombre d'onde axial fixé sans prendre en compte la flèche Ψ . Ce nombre d'onde axial correspond à la ligne en pointillé de la figure 3.9a où l'on observe deux choses. Premièrement, $\tilde{G}^{LO}(k_x, k_z)$ est purement imaginaire pour le cas de Lamb-Oseen. Cela est en accord avec l'éq. (3.13), car tous les autres paramètres sont réels. Deuxièmement, \tilde{G}^{LO} est impaire. Cela indique que dans la direction radiale la rafale se décompose comme une somme de fonctions sinus. Dans cette direction, on prévoit que le chargement sera composé de deux parties en opposition de phase relativement au point d'impact \mathbf{X}_{VI} .

Introduction de la contraction de la veine fluide Lorsque β n'est pas nul, on obtient les résultats présentés sur la figure 3.10. La figure 3.10a montre que le spectre tourne autour de l'origine des nombres d'onde (0,0). Cette rotation est dans le sens horaire pour des valeurs positives de β suivant la description des repères dans le sens direct décrit dans la méthodologie. L'angle de rotation du spectre n'est pas en accord avec l'angle de contraction de la veine fluide (β). Cela provient des différentes rotations appliquées suivant des axes différents lors de la procédure de projection des vitesses. Pour plus de précisions le lecteur est invité à lire l'annexe C. Pour finir, on remarque que le facteur c_β introduit

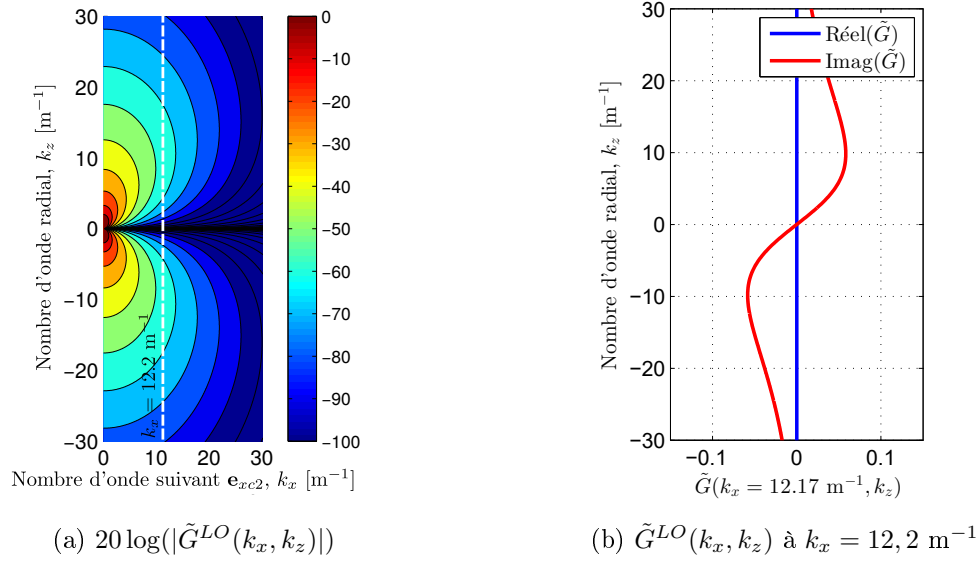


Figure 3.9 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes \tilde{G} , sans angle de contraction de la veine fluide (β), $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$.

par la contraction de la veine fluide réduit le rayon du tourbillon rendant le mécanisme plus impulsif. L'amplitude des rafales est augmentée pour de grands nombres d'onde.

La figure 3.10b montre deux points. Tout d'abord la position du maximum de \tilde{G}^{LO} est décalée. Ceci est en accord avec la rotation du spectre suivant le point (0,0). On remarque que cette fois-ci des rafales pour $k_z = 0 \text{ m}^{-1}$ sont non nulles, le comportement de l'amplitude des rafales n'est plus impair. De plus, on observe que pour une contraction de la veine fluide représentative des DHCR ($\beta = 11^\circ$) l'amplitude est doublée comparée au cas de la figure 3.9b. Cela indique que β a une influence visible sur les *upwash* incidentes.

Influence du modèle de tourbillon. Si l'on compare les différents modèles de tourbillon choisis, on obtient les cartographies présentées sur la figure 3.11. Les résultats sont obtenus pour les paramètres analytiques u_θ^{max} et r_0 identiques tirés de la configuration FL05/AL05. Tout d'abord, on observe que les cartographies tournent toutes autour du centre (0,0) avec la même rotation que le tourbillon de Lamb-Oseen. On remarque aussi que les modèles de Lamb-Oseen et de Scully donnent des résultats très similaires en terme d'intensité.

Ceci est à mettre en opposition avec les résultats trouvés pour le tourbillon de Taylor. Ce spectre bidimensionnel montre deux choses. La première est que $|\tilde{G}^{Ta}(k_x, k_z)|$ concentre son énergie pour des nombres d'onde radiaux (k_z) en lien avec la longueur d'onde au

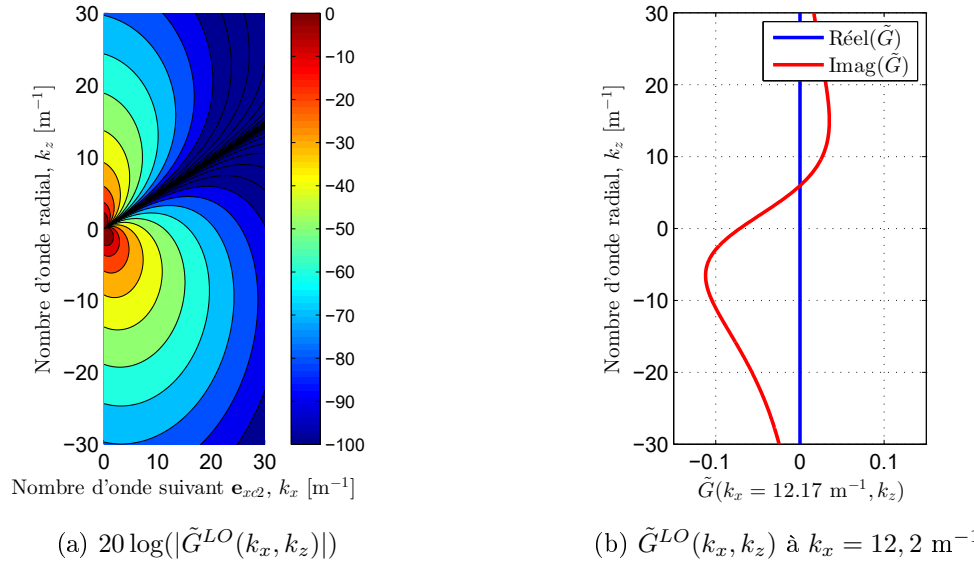


Figure 3.10 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes \tilde{G} , avec angle de contraction de la veine fluide (β), $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$.

centre du tourbillon ($1/r_0 \approx 14 \text{ m}^{-1}$). Cela indique que l'énergie du tourbillon de Taylor est concentrée en son centre.

La principale différence entre les modèles de tourbillons provient de la décroissance de la vitesse azimutale après le cœur visqueux du tourbillon. Les modèles de Scully et Lamb-Oseen sont des modèles avec circulation totale tandis que le modèle de Taylor est un modèle sans circulation totale. On observe l'impact de cette caractéristique macroscopique d'un tourbillon sur les *upwash*. L'amplitude maximale de \tilde{G} est réduite et le comportement dans la direction k_z est modifié.

Solution pour un tourbillon 3D

Influence de la vitesse axiale seule Pour le tourbillon 3D, on peut observer les composantes séparément. La figure 3.12 présente le comportement de $\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)$. La figure 3.12a montre que le comportement de la vitesse axiale est opposé à celui de la vitesse azimutale. Son maximum est pour $k_z = 0 \text{ m}^{-1}$. Les rafales parallèles sont donc plus intenses que les rafales obliques.

La figure 3.12 montre deux points. Le premier est que contrairement à la vitesse azimutale la distribution est paire. Le deuxième point est que $\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)$ est purement réel. Cela

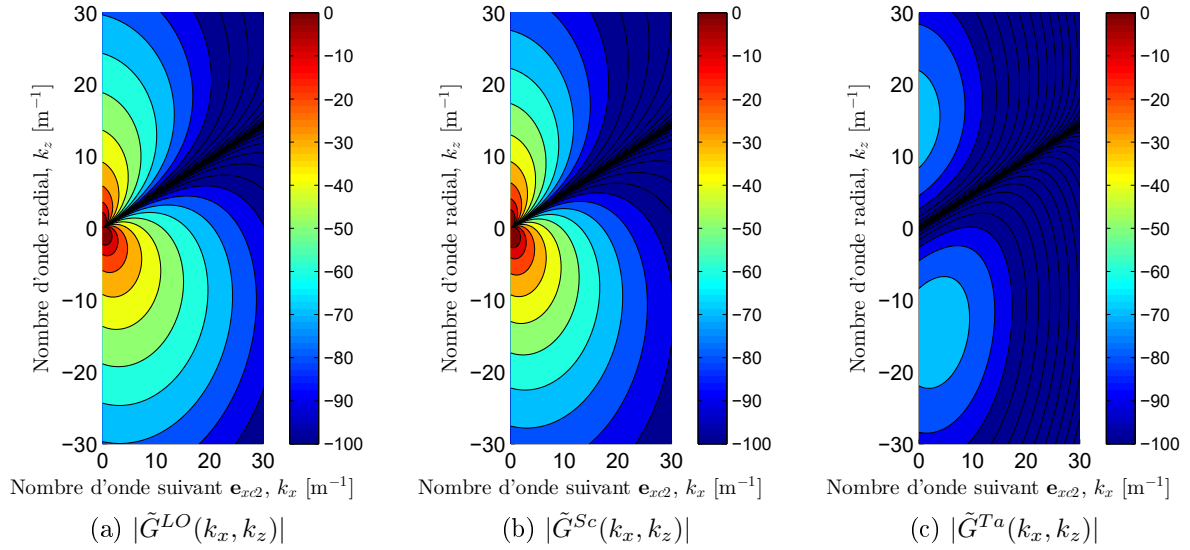


Figure 3.11 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes \tilde{G} pour différents modèles de tourbillon 2D avec contraction de la veine fluide $\beta = 11^\circ$, échelle logarithmique : $20 \log_{10}(|\tilde{G}|)$.

indique que les deux composantes de la vitesse du tourbillon sont déphasées de $\pm\pi/2$ dans le plan complexe. Ces mêmes vitesses sont alors aussi orthogonales dans le plan complexe.

La forme de $\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)$ est une gaussienne. Ceci est en accord avec la transformée de Fourier de ce type de fonctions. Pour finir, cette solution est très aplatie dans le repère spectral. Cet effet provient du fait que l'événement est très impulsif.

Influence de la contraction de la veine fluide sur la vitesse axiale Si l'on combine l'angle de contraction de la veine fluide avec la vitesse axiale, on obtient les résultats présentés sur la figure 3.13. Contrairement à la vitesse azimutale, la vitesse axiale n'est pas beaucoup affectée par β . La gaussienne est légèrement plus aplatie. Cet effet provient du rayon r_0 qui est réduit par c_β . Le mécanisme devient alors moins concentré spatialement.

Modèle 3D complet Si l'on assemble la vitesse azimutale provenant d'un tourbillon de Lamb-Oseen avec la composante axiale gaussienne on obtient les résultats présentés sur la figure 3.14. On remarque que ce spectre est dominé par la vitesse azimutale dans le cas de la FL05/AL05. Cependant, la composante de vitesse dominante est principalement liée à la combinaison des angles d'hélicité (φ) et du calage de la pale aval (γ_2).

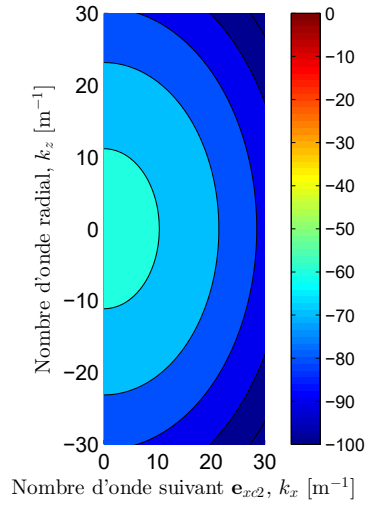
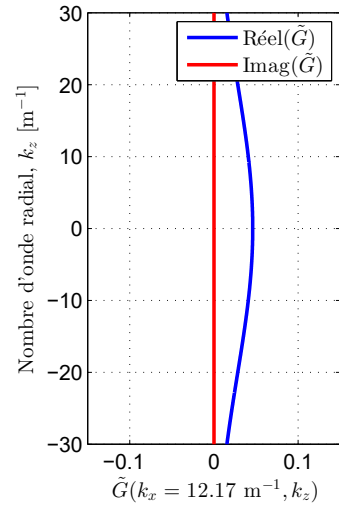
(a) $20 \log(|\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)|)$ (b) $\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)$ à $k_x = 12,2 \text{ m}^{-1}$

Figure 3.12 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes \tilde{G}^{Ga} , sans angle de contraction de la veine fluide, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$ et $\gamma_2 = 40^\circ$.

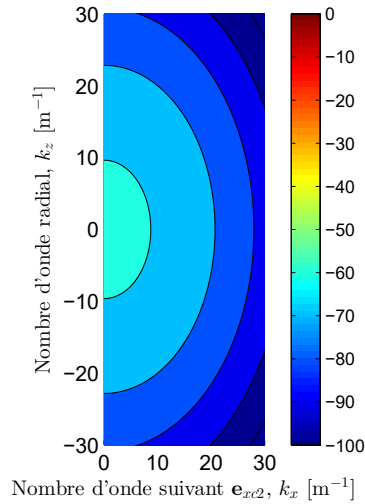
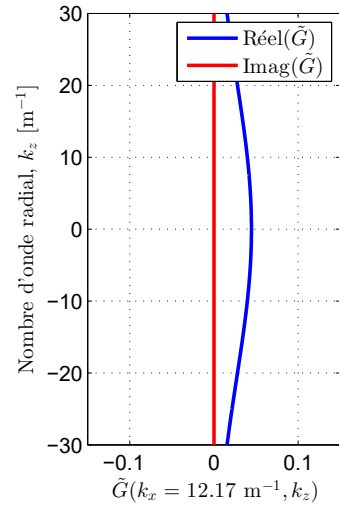
(a) $20 \log(|\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)|)$ (b) $\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z)$ à $k_x = 12,2 \text{ m}^{-1}$

Figure 3.13 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes \tilde{G}^{Ga} , avec angle de contraction de la veine fluide, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$.

3.6.2 Sources acoustiques

Une fois les *upwash* calculées, les sources acoustiques sur la pale aval sont obtenues. Les résultats seront donnés pour la première harmonique de charge ω_1 . La géométrie de la pale

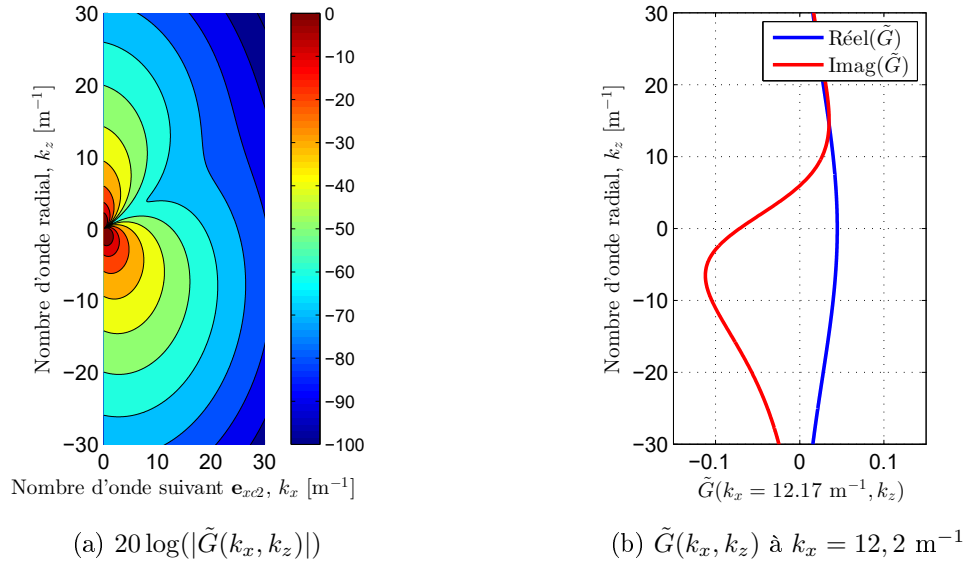


Figure 3.14 Spectre bidimensionnel des *upwash* incidentes $\tilde{G} = \tilde{G}^{LO} + \tilde{G}^{Ga}$, avec angle de contraction de la veine fluide, $u_\theta^{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, $u_z^{max} = 12 \text{ m.s}^{-1}$, $r_0 = 0,07 \text{ m}$, $\varphi = 28^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$ et $\beta = 11^\circ$.

aval utilisée pour calculer les sources acoustiques est présentée sur la figure 3.15. Cette géométrie est à corde constante c_2 , incluant l'angle de flèche Ψ et s'étendant en envergure de l'extrémité de la pale jusqu'au pied de pale. Une iso-surface d'entropie est utilisée pour caractériser le tourbillon impactant la pale. On remarque que la plaque plane analytique (surface maillée en bleu) est similaire à la pale réelle. Les différences de géométries au-delà du point d'impact proviennent de l'angle de dévers qui n'est pas pris en compte pour le calcul des sources acoustiques.

L'envergure de la pale est choisie assez grande, car pour la première harmonique de charge les nombres d'onde radiaux correspondant aux hauts niveaux de \tilde{G} sont pour des nombres d'onde faibles. L'étalement spatial de la source dans la direction radiale sera donc grand. Ceci est en accord avec les résultats numériques obtenus par Falissard *et al.* [46] sur un événement OBVI canonique représentatif des DHCR.

Pour recentrer la position du centre du tourbillon au niveau de l'interaction R_{VI} , toutes les solutions \tilde{l} sont décalées dans la direction radiale. Les solutions contenant les corrections d'extrémités sont calculées pour $z_{c2}^* < 0$, par conséquent le décalage radial correspondant devient :

$$\tilde{l}_{VI} = \tilde{l} e^{-ik_z(R_{2,tip} - R_{VI})}. \quad (3.49)$$

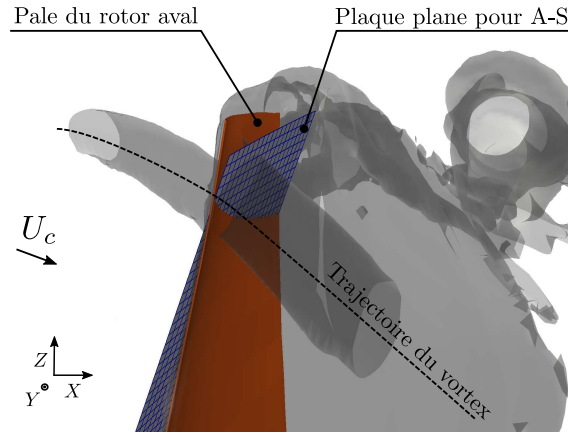


Figure 3.15 Représentation de l'événement OBVI pour la configuration FL05/AL05. La géométrie de la pale aval est la surface rouge, la surface grise est une iso surface d'entropie. La surface maillée en bleu est la surface analytique utilisée dans la méthode d'A-S.

Normalement, l'angle de contraction de la veine fluide va aussi modifier la position radiale de l'impact du tourbillon en accord avec l'éq. (2.56), mais le but de ce manuscrit est de voir l'influence de cet angle dans le calcul des sources acoustiques. Par conséquent, la position du rayon d'interaction R_{VI} sera choisie identique pour tous les cas tests.

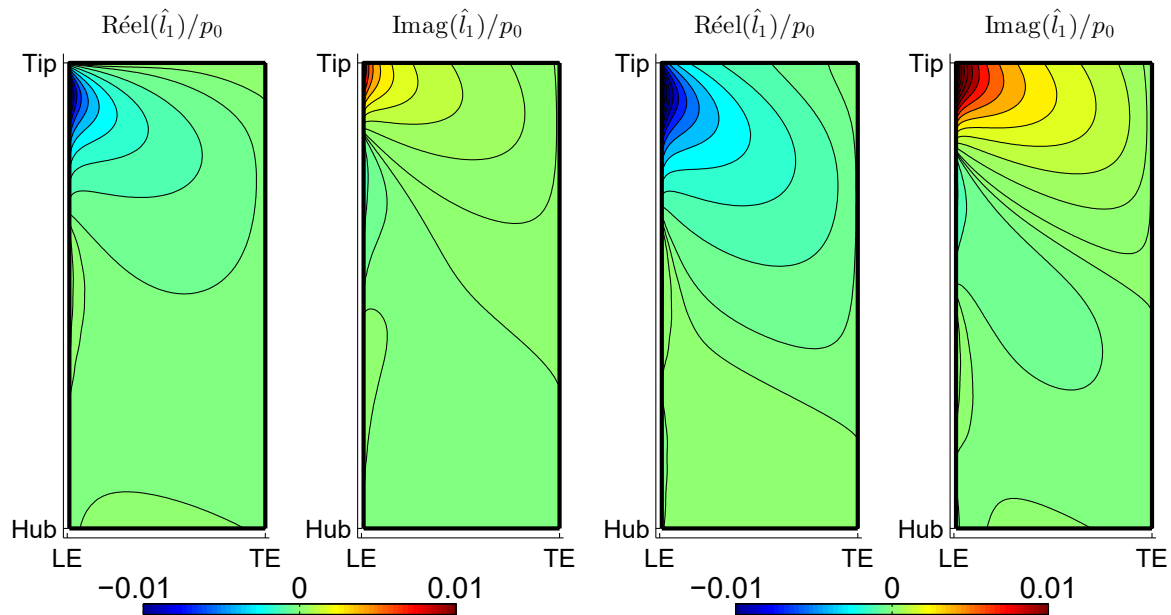
Solution pour un tourbillon 2D

Tourbillon de Lamb-Oseen classique La figure 3.16a présente les résultats pour un tourbillon classique de Lamb-Oseen. Les résultats sont présentés avec des lignes d'iso-valeurs qui sont espacées par un pas non linéaire. En effet le chargement étant concentré au niveau du bord d'attaque les lignes d'iso-valeurs ne seraient pas visibles. Une autre solution serait d'utiliser le saut de pression régularisé $(\sqrt{x_{c2}^*})\hat{l}_m$ [128]. Cependant, la correction d'extrémité sera déformée par ce type de représentation ce qui n'est pas voulu pour effectuer une comparaison des sources acoustiques effectives. Sur les figures le bord d'attaque est indiqué par l'acronyme LE (*Leading Edge*) et le bord de fuite par TE (*Trailing Edge*). Les cartes s'étendent du vrai pied de pale (*hub*) au saumon (*tip*) d'une pale du rotor aval.

On observe que le tourbillon impacte la pale près du saumon. Comparé aux résultats de Roger *et al.* [128] et Falissard *et al.* [46] où la partie réelle du chargement instationnaire est composé de deux lobes en opposition de phase, ici seule une moitié de cette réponse est visible.

Pour finir, on observe que la réponse est très étalée dans la direction radiale pour la première harmonique de charge. Même si le tourbillon est concentré spatialement ($r_0 = 0,07$ m), les sources acoustiques sont encore intenses sur le dernier quart de l'envergure (0,45 m).

Introduction de la contraction de la veine fluide La figure 3.16b présente les résultats où un tourbillon de Lamb-Oseen impacte la pale aval avec l'angle de contraction de la veine fluide β . On remarque que comparées à la figure 3.16a, les sources acoustiques sont plus intenses. Cela est particulièrement vrai pour la partie imaginaire du chargement. L'angle de contraction de la veine fluide augmente l'amplitude de l'interaction. Le cas critique $\beta = \pi/2$ correspondrait à un impact de tourbillon parallèle rencontré dans le cas des pales d'hélicoptères [83] et le chargement instationnaire s'étalerait encore plus dans la direction radiale.



(a) Sans contraction de la veine fluide

(b) Avec contraction de la veine fluide

Figure 3.16 Saut de pression (\hat{l}_1) obtenu pour un tourbillon de Lamb-Oseen à la 1^{ère} harmonique de charge avec et sans contraction de la veine fluide β . Les valeurs sont adimensionnées par la pression atmosphérique standard. Vingt lignes d'iso valeurs sont retenues. Les paramètres du tourbillon sont donnés sur la figure 3.14.

Influence du modèle de tourbillon La figure 3.17 présente les résultats pour les différents types de tourbillons considérés. On remarque que les distributions des sources acoustiques sont similaires entre les différents modèles. Cependant, les amplitudes sont complètement différentes. Le tourbillon de Taylor a une amplitude au moins inférieure d'un ordre de grandeur par rapport aux tourbillons de Scully et de Lamb-Oseen. Le tourbillon de Scully ressemble très fortement au tourbillon de Lamb-Oseen dans sa réponse.

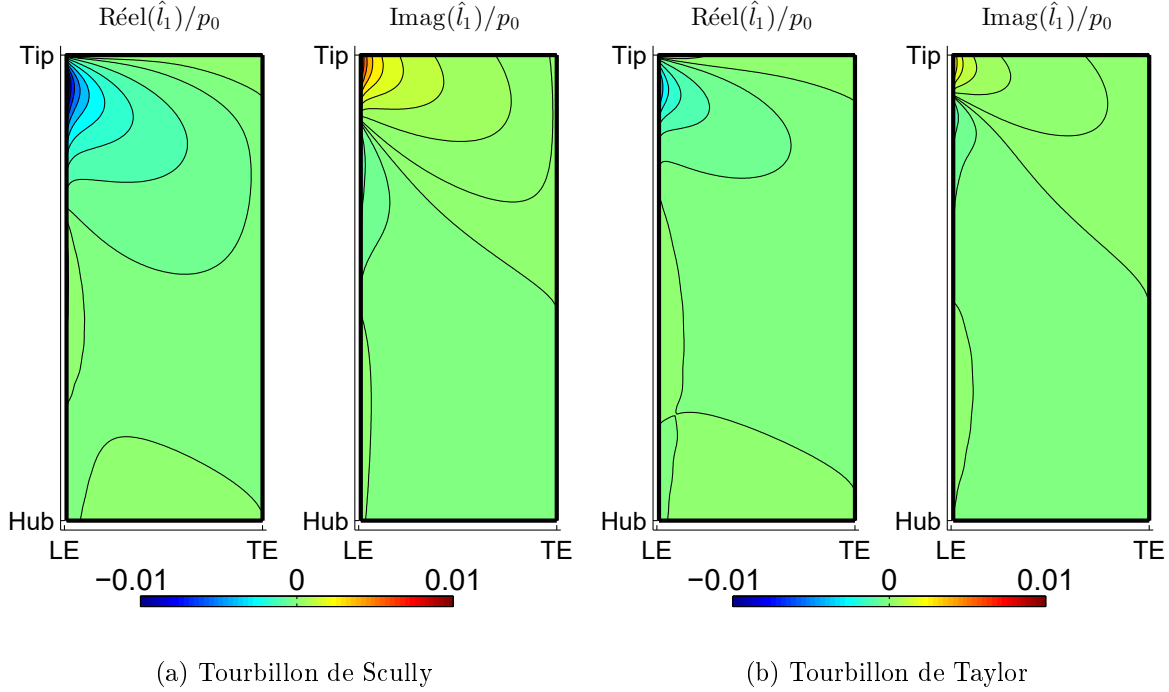
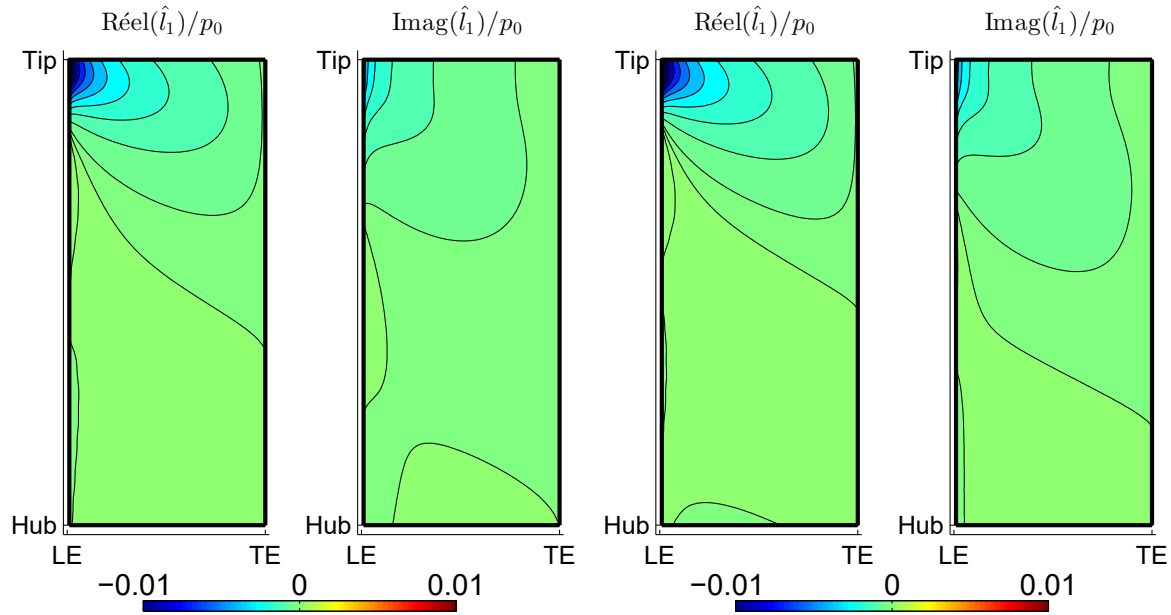


Figure 3.17 Sources acoustiques pour les tourbillons de Scully et Taylor sans contraction de la veine fluide β , mêmes paramètres que sur la figure 3.16a.

Solution pour un tourbillon 3D

Influence de la vitesse axiale seule La figure 3.18a présente les résultats pour la vitesse axiale seule. On observe que la réponse sur la plaque est aussi intense qu'avec un tourbillon de Lamb-Oseen. Cette réponse est aussi très localisée spatialement contrairement à la réponse de la vitesse azimutale. La partie réelle de la réponse est de même signe que la partie imaginaire contrairement à la vitesse azimutale ($\text{Rél}(\hat{l}_1) < 0$ et $\text{Imag}(\hat{l}_1) > 0$) indiquant que les réponses ne sont pas dans le même quadrant du plan complexe.

Influence de la contraction de la veine fluide sur la vitesse axiale La figure 3.18b montre que la contraction de la veine fluide n'influence pas la réponse de la plaque. On se retrouve avec des réponses extrêmement similaires à ce qui a pu être obtenu sans β .



(a) Avec contraction de la veine fluide

(b) Sans contraction de la veine fluide

Figure 3.18 Sources acoustiques pour un déficit de vitesse axiale du tourbillon gaussien avec et sans contraction de la veine fluide β , mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.

Modèle 3D complet La figure 3.19 présente les résultats associant la vitesse axiale et la contraction de la veine fluide. On remarque que la combinaison des deux vitesses donne une augmentation d'une des contributions complexes. La contraction de la veine fluide β augmente l'amplitude des sources acoustiques alors que la vitesse axiale augmente la partie réelle de la réponse mais diminue la partie imaginaire du chargement complet. L'étalement radial des sources acoustique liées à la vitesse axiale est plus faible que la vitesse azimutale donc la phase radiale des sources acoustiques du modèle 3D est donc différent du modèle 2D.

Solution avec CL de type bord de fuite au niveau du saumon

Dans la suite des tests, le tourbillon choisi sera un tourbillon complètement 3D avec vitesse axiale et contraction de la veine fluide. Les comparaisons se feront donc avec la fig. 3.19. On applique la correction d'extrémité \tilde{l}_t . Les sources acoustiques $\tilde{l} = \tilde{l}_{LE} + \tilde{l}_{TE}$ deviennent

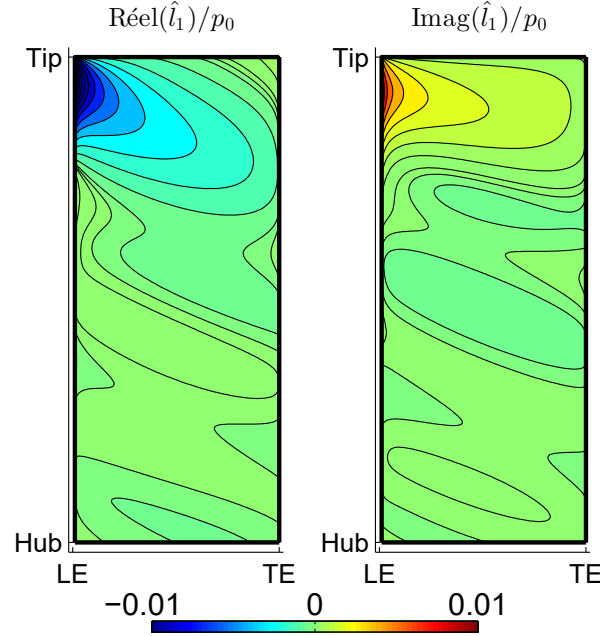


Figure 3.20 Sources acoustiques pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne avec contraction de la veine fluide β et correction d'extrémité de Kutta incluse, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.

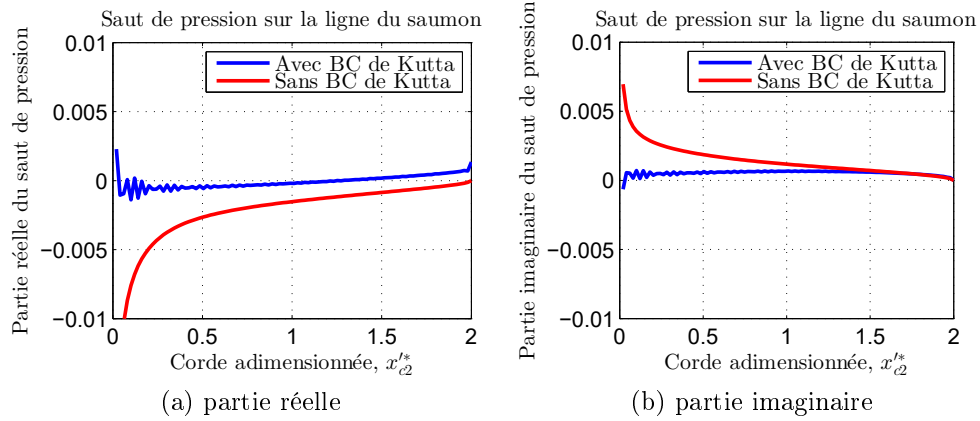


Figure 3.21 Sources acoustiques au niveau du saumon pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne, contraction de la veine fluide β et correction d'extrémité de Kutta incluse, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.

Premièrement, on remarque alors que le chargement se concentre aussi au niveau de l'extrémité de la pale. Ceci est en accord avec le comportement singulier d'une solution d'A-S pour un mécanisme de bord d'attaque. La solution décroît dans la direction radiale d'une manière très rapide. Une nouvelle source acoustique intense est alors localisée au niveau

du coin saumon-bord d'attaque de la pale. Cette source acoustique est du même ordre de grandeur que la solution au niveau du bord d'attaque.

Deuxièmement, on remarque que la solution totale ne respecte plus la condition de Kutta au niveau du bord de fuite. Cela est dû à l'ordre dans lequel les problèmes de Schwarzschild sont résolus. En effet, puisque \tilde{l}_t corrige l'étape initiale ainsi que les itérations 1 et 2 de la solution infinie en envergure rien n'assure que la condition de Kutta soit respectée avec la solution totale. Si l'on souhaiterait cette CL au niveau de l'extrémité de pale il faudrait appliquer la condition de Kutta à $\tilde{l}_{LE} + \tilde{l}_{t,LE}$. Cependant, la rapidité de la correction s'amenuise puisque la solution de ce nouveau problème ne sera pas explicite et donc coûteuse car numérique.

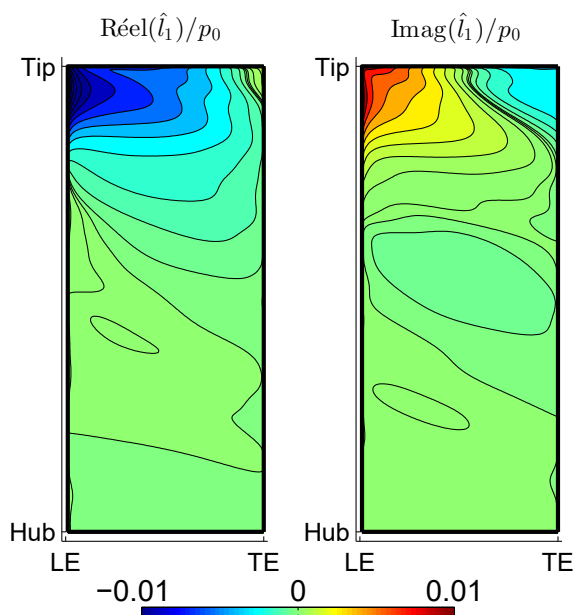


Figure 3.22 Sources acoustiques pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec vitesse axiale gaussienne avec contraction de la veine fluide β , avec application de la CL d'annulation du potentiel au niveau du saumon, mêmes paramètres graphiques que sur la figure 3.16a.

Comparaison avec les sauts de pression numériques

La comparaison des \hat{l}_n analytiques avec les résultats issus du calcul numérique de la géométrie FL05/AL05 (annexe A) ne s'obtient pas instantanément. En effet, la solution analytique est calculée pour une plaque plane infiniment fine ce qui n'est pas le cas de la géométrie réelle. Dans un premier temps, on expliquera la méthode d'extraction de la Surface de Cambrure Moyenne (MCS pour *Mean Camber Surface*) conformément à la méthodologie employée par Roger et Carazo [126]. Grâce à cette MCS, le saut de pression

est calculé puis comparé à la solution analytique pour différents modèles de tourbillon et conditions aux limites.

Méthode d'extraction du saut de pression instationnaire La géométrie de la pale aval est un maillage structuré à deux indices ($i \in \llbracket 1, i_{max} \rrbracket, j \in \llbracket 1, j_{max} \rrbracket$). L'ensemble $\mathbf{X}_{(i,j)}$ des points décrit la pale aval du DHCR dans le repère \mathfrak{R}_0 . On a j_{max} profils décrits à l'aide de i_{max} points. On a aussi préalablement calculé les coefficients de Fourier temporels de la pression aux m harmoniques de charge $\hat{p}_{m,(i,j)}$. Pour j fixé, la valeur $R_{i,j}^2 = Y_{i,j}^2 + Z_{i,j}^2$ est différente suivant l'indice i . La MCS est construite à partir des lignes de cambrure moyennes (MCL) pour les j_{max} profils. La procédure pour obtenir les MCL est la suivante :

1. Trouver les indices i_{LE} et i_{TE} indiquant respectivement les bords d'attaque et de fuite.
2. Séparer les courbes décrivant l'intrados et l'extrados du profil.
3. Interpoler les courbes d'intrados et d'extrados à l'aide d'une interpolation curviligne entre le bord d'attaque et le bord de fuite. On obtient alors les profils (\mathbf{X}_{int} et \mathbf{X}_{ext}).
4. Interpoler les coefficients de Fourier de la pression ($\hat{p}_{m,int}$ et $\hat{p}_{m,ext}$) de la même manière.
5. Calculer les coordonnées de la MCS ($2\mathbf{X}_{MCS} = \mathbf{X}_{ext} + \mathbf{X}_{int}$).
6. Calculer les sauts de pression harmonique ($\hat{l}_m = \hat{p}_{m,int} - \hat{p}_{m,ext}$).

La figure 3.23a présente le résultat de l'extraction d'une MCL. Pour bien apprécier la qualité de la procédure la vue est zoomée sur le bord d'attaque (le cercle rouge). On observe aussi que les interpolations curvilignes représentent correctement l'intrados et l'extrados de la pale. La figure 3.23b présente la MCS pour la pale aval de la configuration.

Résultats obtenus Les résultats pour la première harmonique de charge sont donnés sur la figure 3.24. On remarque que globalement le chargement instationnaire se situe au niveau de la tête de pale. Ceci justifie l'utilisation de la configuration FL05/AL05 pour valider un modèle OBVI.

Par comparaison avec la figure 3.22, on remarque que les niveaux et la décroissance du chargement le long de l'envergure semblent être correctement captés par le modèle analytique. On peut faire la même remarque concernant la variation de chargement dans la direction radiale pour le dernier quart de la pale, le reste de la pale étant vraisemblable-

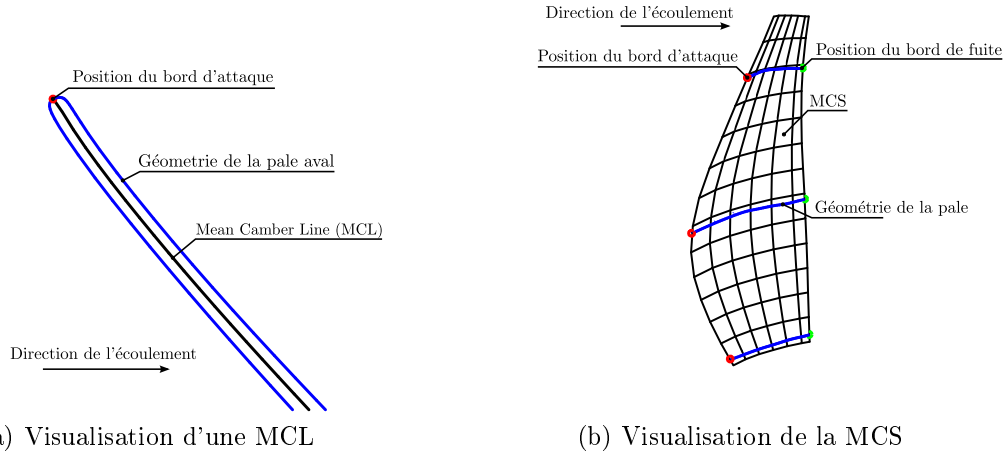


Figure 3.23 Visualisation des extractions de la MCL et de la MCS pour la configuration FL05/AL05.

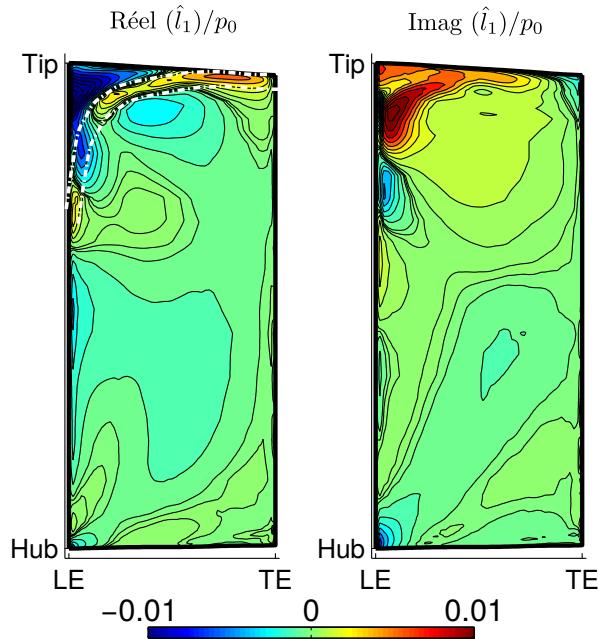


Figure 3.24 Sources acoustiques obtenues à partir du calcul URANS décrit dans l'annexe A à la première harmonique de charge. La trajectoire supposée du tourbillon de bord d'attaque est indiquée par la ligne blanche en pointillé.

ment influencé par l'impact du sillage visqueux. Cependant, la principale différence entre les chargements numérique et analytique provient de la trace identifiée par des lignes en pointillés blanches sur la partie réelle de la distribution des sources acoustiques (figure 3.24). Il est vraisemblable que cet effet provienne de l'influence du tourbillon de bord d'attaque sur le calcul des sources acoustiques [74]. En effet, si l'on rassemble les positions sur

la pale où les chargements analytiques et numériques sont les plus différents et si l'on relie maintenant ces points du bord d'attaque au bord de fuite, on remarque alors que la ligne obtenue créée ressemble à la trajectoire d'un tourbillon de bord d'attaque pour les DHCR [56].

Pour comparer de manière quantitative les chargements analytiques et numériques, des découpes à iso-rayon et à pourcentage de corde constant ont été effectuées. Les comparaisons sont reportées sur les figures 3.25 et 3.26 respectivement pour les valeurs absolues et les phases des sources acoustiques.

Premièrement, les figures 3.25a et 3.25d montrent qu'un tourbillon 2D n'arrive pas à simuler complètement le chargement instationnaire. Les sources acoustiques ont la bonne variation dans la direction radiale, mais leur maximum est 5 fois inférieur à ce que la CFD obtient. Le tourbillon de Taylor a des résultats qui sont un ordre de grandeur en dessous des extractions numériques. L'inclusion de la contraction de la veine fluide améliore les résultats, mais le chargement total est toujours 3 fois inférieur à la CFD.

Les figures 3.25b et 3.25e montrent que la vitesse axiale est importante dans le calcul des sources acoustiques puisque lorsqu'on combine vitesse axiale et vitesse azimutale on obtient des résultats qui sont cette fois-ci 2 fois inférieurs à la CFD. On remarque aussi que la position du maximum de chargement lié à la vitesse axiale est située plus près de la ligne de saumon que celle de la vitesse azimutale. Cependant, la combinaison des deux vitesses a son maximum qui concorde avec les extractions numériques.

Pour finir, la figure 3.25f montre que même si la condition de Kutta semble satisfaire ce qui se passe en tête de pale, une condition aux limites de type annulation du potentiel donne des niveaux qui sont plus comparables à ce qui a été obtenu par la simulation numérique. Sur la figure 3.25c, on remarque même que la décroissance du chargement le long de la corde est plus en accord avec la CFD dans le cas d'une condition aux limites de type bord d'attaque. Le pic du chargement analytique est décalé vers le saumon de pale, mais l'intensité des sources est comparable.

Les figures 3.26a, 3.26b et 3.26c montrent que la phase calculée par la méthode analytique est encore une fois inférieure à ce qui a été calculé par la CFD. On remarque que la phase du modèle de tourbillon complet avec condition de Kutta à l'extrémité donne des résultats proche des extractions numériques. On peut supposer que les différences de phase proviennent de l'effet du tourbillon de bord d'attaque. De plus, on remarque que la CL avec annulation du potentiel donne les bons niveaux de variation de phase ; cependant la pente est opposée aux résultats de la CFD.

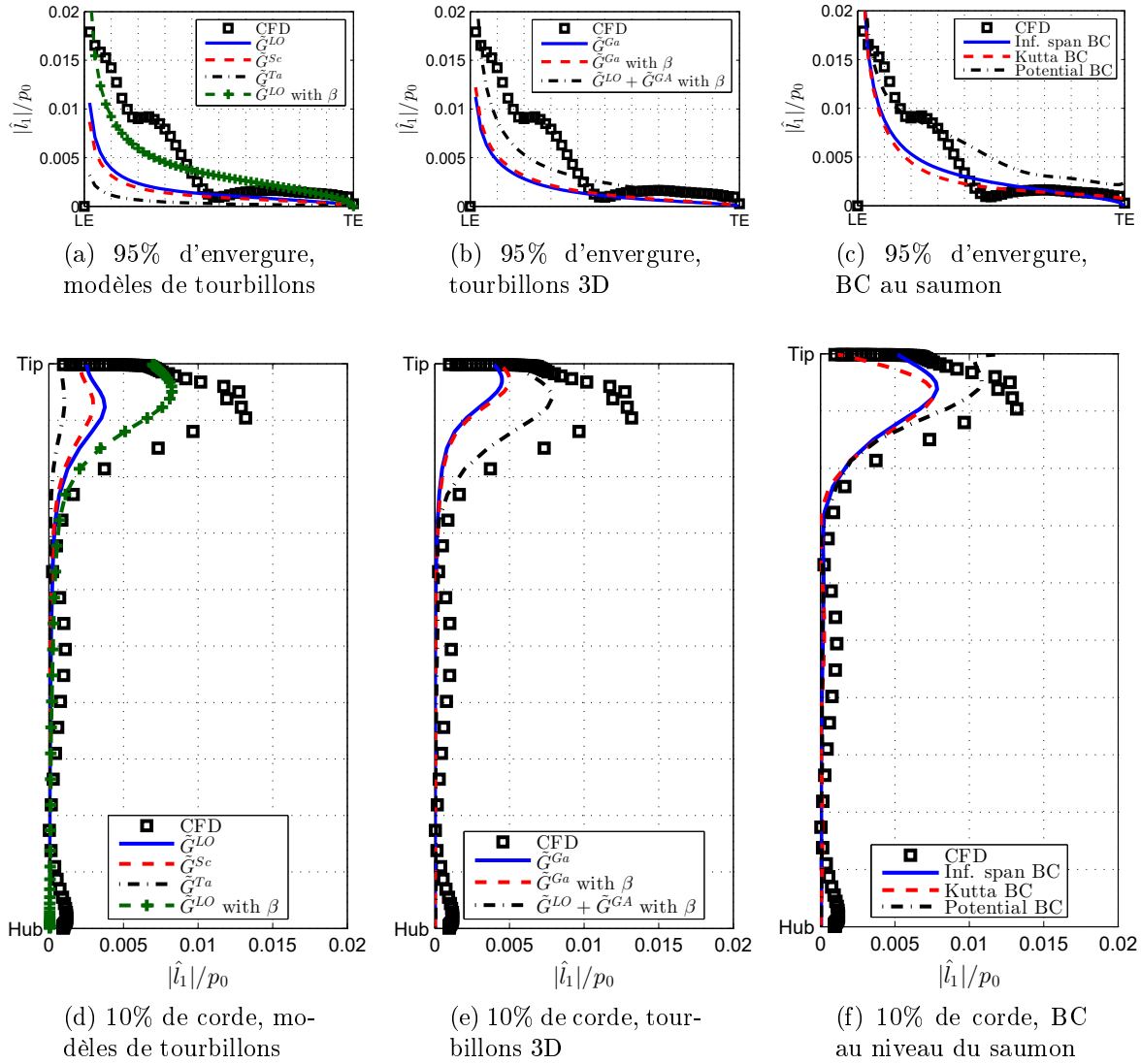


Figure 3.25 Comparaison de la valeur absolue des sources acoustiques à la 1re harmonique de charge.

On remarque les grandes différences entre résultats numériques et analytiques pour les résultats avec CL potentiel et de Kutta, mais la différence devient grande pour des valeurs de chargement très faible où les erreurs numériques de la transformée de Fourier inverse peuvent apparaître.

En conclusion, les sources acoustiques déterministes ont été calculées pour un événement OBVI en utilisant la méthode d'Amiet-Schwarzschild. Seuls les tourbillons avec circulation non nulle donnent des résultats comparables à la simulation numérique. Cependant, l'angle de contraction de la veine fluide β et une nouvelle condition aux limites de type bord d'attaque permettent d'atteindre les résultats extraits d'un calcul URANS. Cette

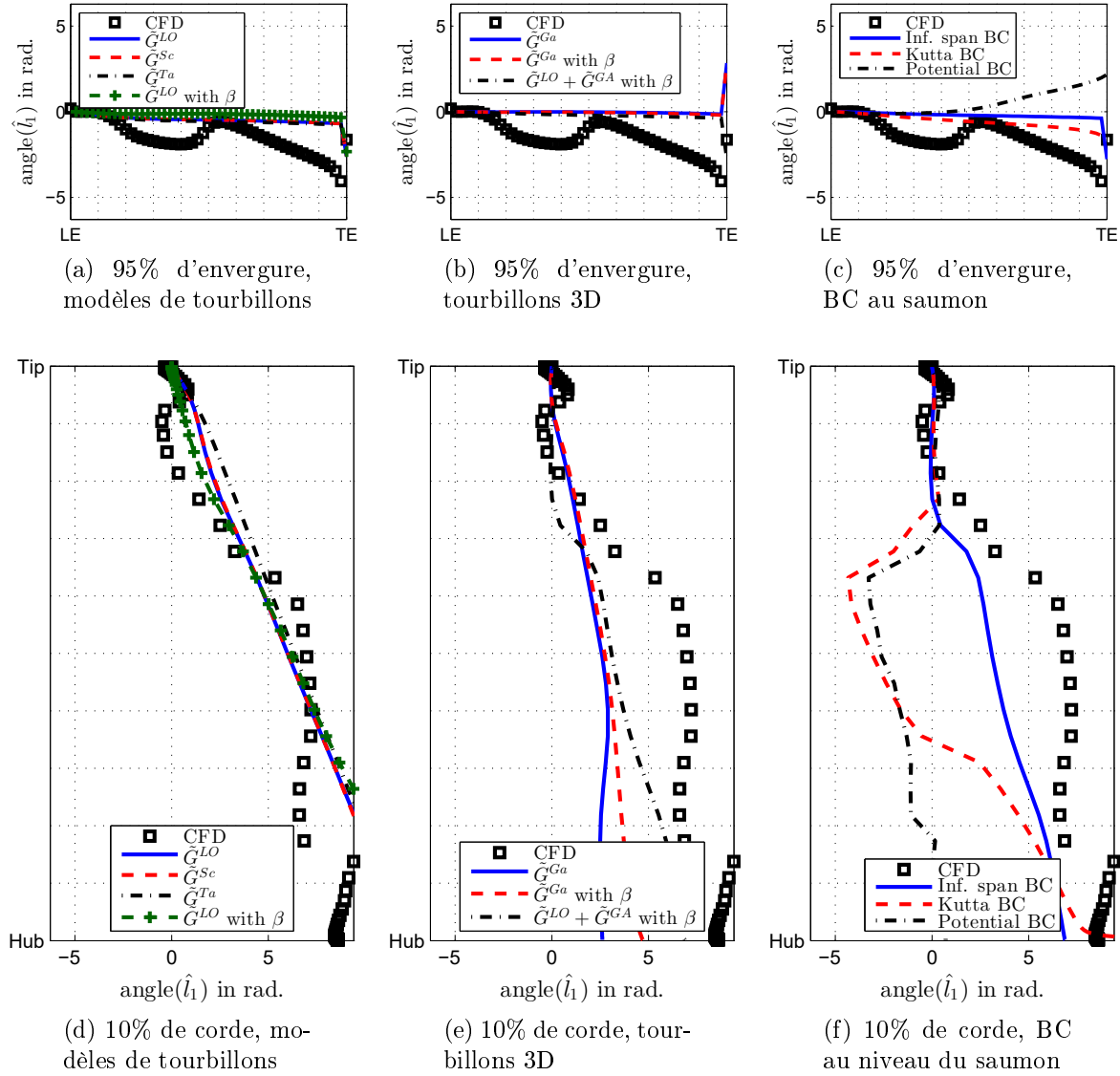
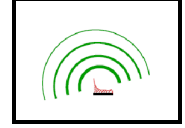


Figure 3.26 Comparaison des phases pour les sources acoustiques à la première harmonique de charge.

nouvelle condition aux limites au niveau du saumon est déterminée par la même méthodologie que celle de Roger *et al.* [128]. Globalement, il semble que cette correction améliore la comparaison entre résultats numériques et analytiques. Maintenant que les sources acoustiques ont été calculées, la prévision du bruit tonal de la pale aval d'un DHCR peut être faite.

CHAPITRE 4



BRUIT TONAL POUR UN DOUBLET D'HÉLICES CONTRAROTATIVES

4.1 Introduction

Le bruit tonal d'interaction est prédit à partir du chargement instationnaire obtenu dans le chapitre précédent. Pour ce faire, le chapitre 1 présentait les différentes méthodes disponibles dans la littérature. Dans la méthodologie, une analogie acoustique fréquentielle était sélectionnée pour prévoir le bruit émis.

Le développement s'effectuera en deux parties. La première étudiera le bruit en utilisant une analogie pour un profil fixe, l'analogie de Curle [28]. Dans cette partie, une attention particulière sera portée sur l'influence des nouveaux paramètres associés au tourbillon (β, u_z) , mais aussi sur les conditions aux limites à l'extrémité de la pale. La seconde partie utilisera la formulation en dipôle tournant pour calculer le bruit émis par une pale de DHCR [20, 72]. Le but de cette dernière partie est de comparer les résultats de la méthodologie complète à des résultats numériques et expérimentaux.

4.2 Propagation acoustique autour d'une plaque plane fixe

Le but n'est pas de redévelopper complètement la théorie de Curle [28] mais de donner les points clefs de la modélisation et de faire le lien avec les résultats obtenus dans les chapitres précédents.

Le repère est attaché à une pale du rotor aval par conséquent le repère $\mathfrak{R}_p = (\mathbf{X}_0, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})$ est utilisé. \mathbf{X}_0 est le point au niveau du bord d'attaque de la pale aval et à la hauteur du saumon de pale comme indiqué sur la figure 4.1. Cette écriture au bord d'attaque est classique dans la littérature [3, 56, 128] même si les résultats en champ lointain géométrique ne seront pas modifiés par une origine choisie différemment.

La pression acoustique s'obtient analytiquement à partir de l'éq. (1.14) où seul le terme de charge est conservé :

$$4\pi p'(\mathbf{X}, t) = -\frac{\partial}{\partial X_i} \int_S \frac{F_i(\mathbf{x}_{c2}, t - R'_e/c_0)}{R'_e|1 + M_r|} dS, \quad (4.1)$$

où R'_e est le rayon d'émission, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ est le vecteur position des observateurs en coordonnées cartésiennes dans le repère \mathfrak{R}_p et M_r le nombre de Mach relatif entre l'observateur et la source acoustique :

$$M_r = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}_{c2}}{|\mathbf{X} - \mathbf{x}_{c2}|} \cdot \frac{\mathbf{U}}{c_0}. \quad (4.2)$$

On considère les modifications sur la dérivée du vecteur des forces aérodynamiques agissant sur le fluide $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$:

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_i} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (F_i \cdot n_i), \quad (4.3)$$

avec $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\mathbf{X} - \mathbf{x}_{c2})/(R'_e|1 - M_r|)$ le vecteur directeur entre la source et l'observateur. Si l'on considère la plaque plane fixe située en $y_{c2} = 0$ comme sur la figure 1.12a alors les efforts aérodynamiques sont uniquement portés par la composante n_y :

$$n_y = \frac{Y - y_{c2}}{R'_e|1 - M_r|} = \frac{Y}{R'_e|1 - M_r|}, \quad (4.4)$$

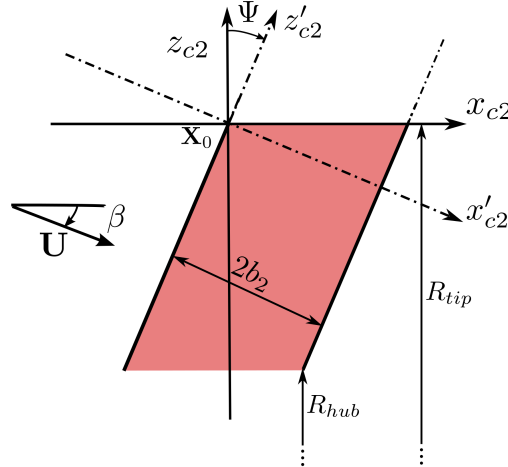


Figure 4.1 Représentation de la géométrie de la pale aval pour le calcul des intégrales de rayonnement.

avec Y la position de l'observateur dans la direction \mathbf{e}_{yc2} . De cette manière, l'éq. (4.1) devient :

$$4\pi p'(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{Y F_y(\mathbf{x}_{c2}, t - R'_e/c_0)}{c_0(R'_e|1 - M_r|)^2} dS, \quad (4.5)$$

En utilisant la solution d'Amiet-Schwarzschild (eq. (3.35)) pour F_y on obtient :

$$\begin{aligned} 4\pi p'(\mathbf{X}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{Y \tilde{l}}{c_0(R'_e|1 - M_r|)^2} e^{-i\omega(t - R'_e/c_0)} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{iYk}{(R'_e|1 - M_r|)^2} (\tilde{l}_{LE} + \tilde{l}_{TE} + \tilde{l}_t) e^{-i\omega t} e^{ikR'_e} dS, \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde acoustique; \tilde{l}_{LE} et \tilde{l}_{TE} indiquent les solutions du chargement instationnaire respectivement pour la 1re et la 2e solution de la méthode d'Amiet-Schwarzschild obtenues à partir de l'équation (3.41) et \tilde{l}_t la correction d'extrémité de type bord de fuite (eq. (3.44)) ou bord d'attaque (eq. (3.47)). Les bornes d'intégration de la surface S peuvent être exprimées dans le repère (x_{c2}, z'_{c2}) :

$$\int_S dS \rightarrow \int_0^{2b_2/\cos\Psi} \int_{-L/\cos\Psi}^0 dz'_{c2} dx_{c2}, \quad (4.7)$$

où $L = |R_{tip} - R_{hub}|$ est l'envergure de la pale aval. R_{hub} et R_{tip} sont respectivement les rayons minimum et maximum de la pale de DHCR considérée. Pour la première itération de la solution d'A-S, on écrit :

$$\tilde{p}'_{LE}(\mathbf{X}, \omega) = \int_0^{2b_2/\cos\Psi} \int_{-L/\cos\Psi}^0 \frac{iYk e^{ikR'_e}}{4\pi(R'_e|1 - M_r|)^2} \frac{A e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x'_{c2} + ik'_z z'_{c2}}}{\sqrt{x'_{c2}}} dz'_{c2} dx_{c2}, \quad (4.8)$$

et la deuxième itération :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{TE}(\mathbf{X}, \omega) &= \frac{-i}{4\pi} \int_0^{2b_2/\cos\Psi} \int_{-L/\cos\Psi}^0 \frac{Yk e^{ikR'_e}}{(R'_e|1 - M_r|)^2} \frac{A}{\sqrt{2}} e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x'_{c2} + ik'_z z'_{c2}} \\ &\times [1 - (1 + i)E^*(2\kappa(x'_{c2} - 2))] dz'_{c2} dx_{c2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pour un parallélogramme, les bornes radiales dans le repère (x'_{c2}, z'_{c2}) dépendent de la valeur de la position de la corde. On a donc :

$$\int_S dS \rightarrow \int_0^{2b_2} \int_{-L/\cos\Psi + \tan\Psi x'_{c2}}^{\tan\Psi x'_{c2}} dz'_{c2} dx'_{c2}. \quad (4.10)$$

Par conséquent, avec le changement de variable $z'_{c2} = \chi + \tan \Psi x'_{c2}$, l'intégrale peut être résolue par le théorème de Fubini.

L'observateur est par la suite considérée en champ lointain acoustique et géométrique. La vitesse de convection ($\mathbf{U} = (U_1, 0, U_2)_{\mathfrak{R}'_p}$) est alignée avec l'angle de contraction de la veine fluide (β). L'équation (B.19) décrit le développement limité à l'ordre 1 de la distance source-observateur qui s'écrit [19] :

$$R'_e \approx S_0 + \frac{M_1 x'_{c2}}{\beta_0^2} + \frac{M_2 z'_{c2}}{\beta_0^2} - \beta_2^2 \frac{X' x'_{c2}}{\beta_0^2 S_0} - \beta_1^2 \frac{Z' z'_{c2}}{\beta_0^2 S_0}, \quad (4.11)$$

avec $\beta_0^2 = 1 - M^2$, $\beta_1^2 = 1 - M_1^2$, $\beta_2^2 = 1 - M_2^2$ les coefficients de compressibilité et $S_0 = \sqrt{\beta_2^2 X'^2 + \beta_0^2 Y^2 + \beta_x^2 Z'^2}$ la distance origine-observateur corrigée par la convection. $X' = X \cos \Psi + Z \sin \Psi$ et $Z' = -X \sin \Psi + Z \cos \Psi$ sont les coordonnées de l'observateur après rotation de l'angle de flèche Ψ . Le terme $R'_e |1 - M_r|$ est développé à l'ordre 0 comme pour l'équation (B.21) :

$$R'_e |1 - M_r| \approx S_0. \quad (4.12)$$

Si on utilise les éqs. (4.11) et (4.12) dans l'éq. (4.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{LE}(\mathbf{X}, \omega) = & \frac{i\pi Y k}{S_0^2} \rho_0 U_1 \tilde{G}(k_x, k_z) e^{ikS_0} \frac{b_2^2}{\beta_1} \int_{-L\beta_1/(b_2 \cos \Psi)}^0 e^{i(k^*(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_1 \beta_0^2 S_0) + k_z^*)\chi^*} d\chi^* \\ & \times \underbrace{\frac{-\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\pi \sqrt{k_x'^* + \beta_1^2 \kappa}} \int_0^2 \frac{\exp(i(-\mu M_1 + \kappa)x'_{c2}^* + i \tan \Psi \beta_1 k_z'^* x'_{c2}^* + i k^* \mathcal{D} x'_{c2}^*)}{\sqrt{2\pi x'_{c2}^*}} dx'_{c2}^*}_{\mathcal{L}_{LE}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec $k^* = kb_2$ le nombre d'onde acoustique adimensionnel et \mathcal{D} le terme utilisé pour compacter l'écriture de la phase acoustique :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\beta_0^2 S_0} (M_1 S_0 - \beta_2^2 X') + \frac{\tan \Psi}{\beta_0^2 S_0} (M_2 S_0 - \beta_1^2 Z'). \quad (4.14)$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{TE}(\mathbf{X}, \omega) &= \frac{i\pi Y k}{S_0^2} \rho_0 U_1 \tilde{G}(k_x, k_z) e^{ikS_0} \frac{b_2^2}{\beta_1} \int_{-L\beta_1/(b_2 \cos \Psi)}^0 e^{i(k^*(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_0^2 S_0) + \beta_1 k_z^*) \chi^*} d\chi^* \\ &\times \underbrace{\frac{e^{i\pi/4}}{\pi \sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}} \int_0^2 (1 - (1+i)E^*(2\kappa(x_{c2}'^* - 2))) e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x_{c2}'^* + i\beta_1 \tan \Psi k_z'^* x_{c2}'^* + ik^* \mathcal{D} x_{c2}'^*} dx_{c2}'^*}_{\mathcal{L}_{TE}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans la direction de la corde $\mathbf{e}_{x'c2}$, le résultat de l'intégration est appelé intégrale de rayonnement dans la direction de la corde. Cette dernière sera calculée dans un premier temps. Dans un second temps, l'intégrale dans la direction $\mathbf{e}_{z'c2}$ sera calculée.

4.2.1 Intégrales de rayonnements suivant la corde

Calcul de \mathcal{L}_{LE}

Le calcul de l'intégrale de rayonnement dans la direction de la corde liée à la solution de bord d'attaque pour une rafale supercritique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LE} &= \frac{-\sqrt{2}}{\pi \sqrt{k_x'^* + \beta_1^2 \kappa}} e^{i\pi/4} \int_0^2 \frac{\exp(i(-\mu M_1 + \kappa + \tan \Psi \beta_1 k_z'^* + ik^* \mathcal{D})x_{c2}'^*)}{\sqrt{2\pi x_{c2}'^*}} dx_{c2}'^* \\ &= e^{-i\Theta_2} \frac{-\sqrt{2}}{\pi \sqrt{(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)\Theta_1}} E(2\Theta_1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \kappa - \mu M_1 + \tan \Psi \beta_1 k_z'^* + k^* \mathcal{D} \\ \Theta_2 &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ces expressions pour Θ_1 et Θ_2 sont similaires à l'éq. (3) proposée par Giez *et al.* [56] sauf que l'origine des axes est située à mi-corde du profil au lieu du bord d'attaque. De cette manière, Θ_2 devient $\Theta_2 = \Theta_1 - (\kappa - \mu M_1) - \pi/4$. Si $\beta = 0^\circ$ et $\Psi = 0^\circ$ alors Θ_1 est identique à la formulation présentée par Roger *et al.* [128] ce qui est une condition nécessaire mais pas suffisante au développement ci-dessus.

Calcul de \mathcal{L}_{TE}

D'une manière similaire, l'intégrale de rayonnement dans la direction de la corde pour l'itération 2 de la méthode d'A-S est calculée. Pour une rafale supercritique on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TE} &= \frac{e^{i\pi/4}}{\pi \sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}} \\ &\times \int_0^2 (1 - (1+i)E^*(2\kappa(x_{c2}'^* - 2))) e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x_{c2}'^*} e^{i(k^* \mathcal{D} + \tan \Psi \beta_1 k_z'^*)x_{c2}'^*} dx_{c2}'^*. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La solution analytique s'obtient en identifiant les termes de la solution de la première itération :

$$\mathcal{L}_{TE} = \underbrace{\frac{1}{\pi \sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}}}_{A_{TE}} e^{-i\Theta_2} \int_0^2 (1 - (1+i)E^*(2\kappa(\xi - 2))) e^{i\Theta_1 \xi} d\xi,$$

et en procédant à une intégration par parties :

$$\mathcal{L}_{TE} = A_{TE} \left(\left[(1 - (1+i)E^*(2\kappa(\xi - 2))) \frac{e^{i\Theta_1 \xi}}{i\Theta_1} \right]_0^2 + \frac{2(1+i)\kappa}{i\Theta_1} \int_0^2 \frac{e^{-i2\kappa(\xi-2)}}{\sqrt{2\pi 2\kappa(\xi-2)}} e^{i\Theta_1 \xi} d\xi \right) \quad (4.19)$$

La solution s'obtient avec l'intégrale de Fresnel et en réarrangeant les termes :

$$\mathcal{L}_{TE} = \frac{A_{TE}}{\Theta_1} \left(i(1 - e^{i2\Theta_1}) - (1+i)E(4\kappa) + (1+i)e^{i2\Theta_1} \sqrt{\frac{\kappa}{\Theta_3}} E(2\Theta_3) \right) \quad (4.20)$$

avec :

$$\Theta_3 = -\kappa - \mu M_1 + k^* \mathcal{D}. \quad (4.21)$$

La solution pour les rafales subcritiques s'obtient en utilisant la fonction erreur complexe à la place des intégrales de Fresnel (équations (3.39)) et en remplaçant κ par $i\kappa'$ comme indiqué dans la section 3.4.2.

Intégration suivant l'envergure

Après avoir intégré dans la direction de la corde, l'intégration est effectuée dans la direction de l'envergure. Cette intégrale est appelée I_r et rassemble les termes à intégrer dans la

direction $\mathbf{e}_{z'c2}$:

$$I_r = \int_{-L\beta_1/(b_2 \cos \Psi)}^0 e^{i(k^*(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_1 \beta_0^2 S_0) + k'_z) \chi^*} d\chi^*. \quad (4.22)$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles complexes. En effectuant le changement de variable $\xi = \chi^* + L\beta_1/(2b_2 \cos \Psi)$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_r &= e^{-i(k(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_0^2 S_0) + k'_z) \frac{L}{2 \cos \Psi}} \int_{-L\beta_1/(2b_2 \cos \Psi)}^{L\beta_1/(2b_2 \cos \Psi)} e^{i(k^*(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_1 \beta_0^2 S_0) + k'_z) \xi} d\xi \\ &= \frac{2 \cos \Psi}{L} e^{-i(k(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_0^2 S_0) + k'_z) \frac{L}{2 \cos \Psi}} \text{sinc} \left(\left(k \frac{M_2 S_0 - \beta_1^2 Z'}{\beta_0^2 S_0} + k'_z \right) \frac{L}{2 \cos \Psi} \right), \end{aligned}$$

avec $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ la définition du sinus cardinal. On notera que les intégrales de rayonnement ne sont pas analytiques quand les corrections d'extrémité sont rajoutées à la solution et ce que ce soit pour les corrections de type bord d'attaque ou de type bord de fuite.

Le comportement asymptotique de I_r pour une plaque d'envergure infinie permet de simplifier la sommation sur les nombres d'onde obliques de l'équation (3.41). En effet, pour $L \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$I_r \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4\pi \cos \Psi}{L} e^{-i(k(M_2 S_0 - \beta_1^2 Z')/(\beta_0^2 S_0) + k'_z) \frac{L}{2 \cos \Psi}} \delta \left(\left(k \frac{M_2 S_0 - \beta_1^2 Z'}{\beta_0^2 S_0} + k'_z \right) \frac{L}{2 \cos \Psi} \right). \quad (4.23)$$

Cette écriture signifie que lorsque l'envergure de la plaque plane est suffisamment large, un seul nombre d'onde radial contribue efficacement au rayonnement. Ce nombre d'onde est celui pour lequel l'onde acoustique émise a un front d'onde perpendiculaire à la ligne joignant la plaque plane et l'observateur. La figure 4.2 présente les résultats des intégrales de rayonnement $Y|\mathcal{L}_{LE}|k^*/S_0$. On remarque que les lobes acoustiques sont perpendiculaires au bord d'attaque pour n'importe quel vecteur vitesse. De plus, on observe que quand le vecteur vitesse est aligné avec le bord d'attaque ($\Psi = 35^\circ$ et $\beta = -35^\circ$) l'amplitude de la pression acoustique est minimale. L'amplitude minimale est due à la vitesse de trace des *upwash* incidentes dans la direction $\mathbf{e}_{z'c2}$ qui est minimale [19]. L'influence de l'angle β est minime. Il a pour effet d'augmenter (ou de diminuer) légèrement le rayonnement lorsqu'il augmente (ou diminue) la vitesse de trace dans la direction $\mathbf{e}_{z'c2}$.

4.2.2 Bruit produit par une série d'OBVI sur une plaque plane fixe

Le caractère périodique de l'interaction permet d'écrire la transformée de Fourier de la pression acoustique \tilde{p}' comme une série de Fourier dont les coefficients s'écrivent \hat{p}'_m . Le lien entre transformation de Fourier et les coefficients de la série se fait avec la formule sommatoire de Poisson comme pour l'équation (3.41) :

$$\hat{p}'_m = \frac{2\pi}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}'(k'_{x,m}, k'_z) dk'_z. \quad (4.24)$$

Dans un premier temps, l'influence des différents modèles de tourbillons, de l'angle β et de la vitesse axiale est examinée. Pour éviter la coupure artificielle au saumon de pale,

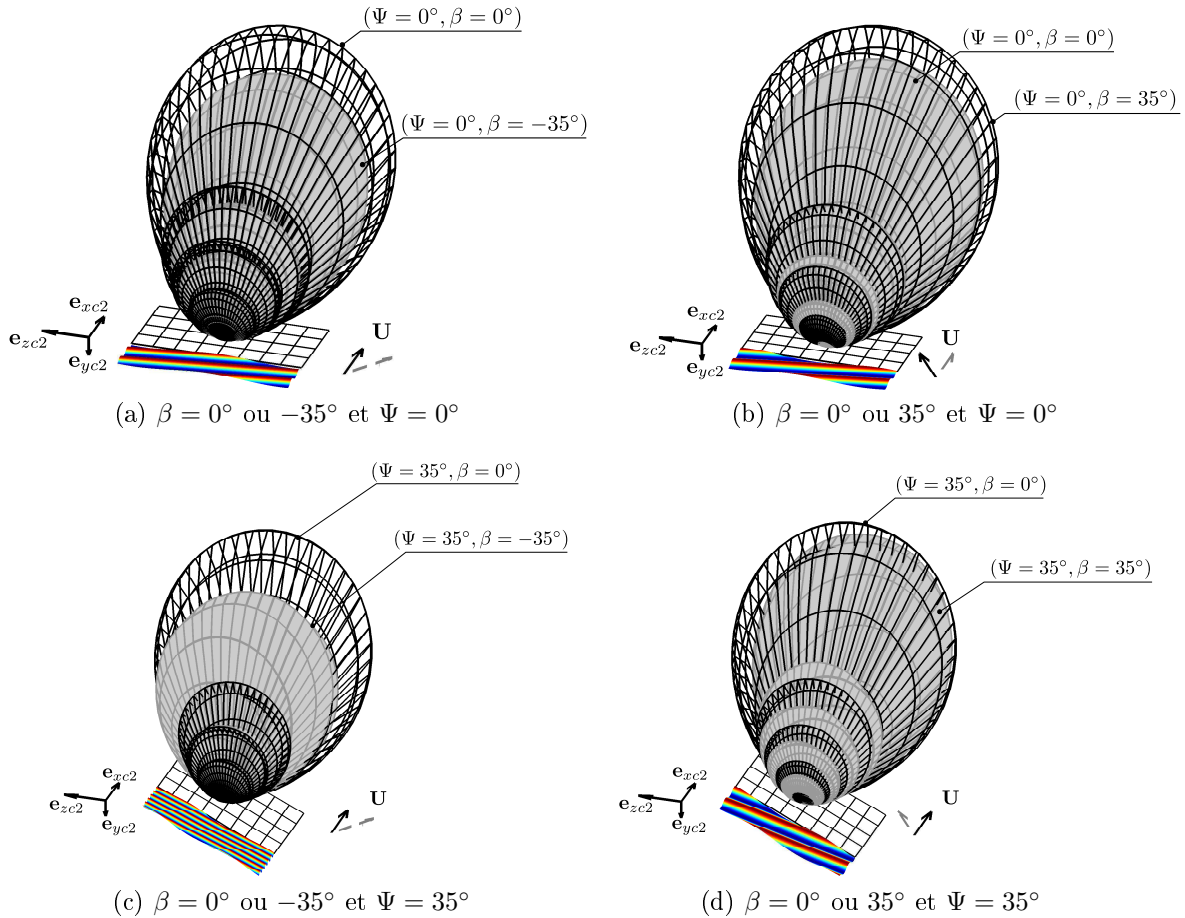


Figure 4.2 Intégrale de rayonnement $Y|\mathcal{L}_{LE}|k^*/S_0$ pour différents angles de contraction de la veine fluide β et différents angles de flèche Ψ . Le nombre de Mach est $M = 0,44$, le nombre d'onde acoustique adimensionnel est $k^* = 4$ et $k'_z = kb_2/4$.

la plaque plane utilisée pour le calcul de la réponse acoustique est prolongée au-delà de l'extrémité de pale. La plaque plane est illustrée sur la figure 4.3.

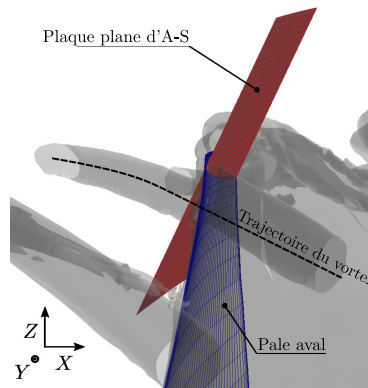


Figure 4.3 Plaque plane utilisée pour l'étude canonique des paramètres β et des modèles de tourbillon.

Influence du modèle de tourbillon

La figure 4.4 présente les directivités pour les différents modèles de tourbillons 2D. La vitesse axiale n'est pas prise en compte dans un premier temps. Sur la figure 4.4a, on observe que la directivité acoustique d'un événement OBVI est proche de celle d'un quadripôle latéral présenté à la figure E.3 si l'on omet l'angle de flèche Ψ . Ce rayonnement acoustique est obtenue puisque le chargement instationnaire est composé de deux lobes en opposition de phases qui créent une interférence destructive en champ lointain. L'intensité acoustique d'un impact OBVI utilisant uniquement la vitesse azimutale et sans angle de contraction de la veine fluide est donc diminuée par le chargement instationnaire en opposition de phase.

Le rayonnement acoustique dipolaire dissymétrique observé aux figures 4.4 (b)-(d) provient de l'angle de flèche Ψ qui déséquilibre l'opposition de phase et réduit les interférences destructives en champ lointain.

De plus, on observe que le modèle de tourbillon a une forte influence sur l'amplitude du bruit émis. En effet, les tourbillons avec circulation sont similaires alors que le bruit émis par l'impact OBVI d'un tourbillon sans circulation est d'un ordre de grandeur plus faible. Ces résultats sont similaires à ceux trouvés par Falissard *et al.* [46] par simulation numérique. Puisque la directivité acoustique n'est pas modifiée par le modèle de tourbillon choisi, le choix de la décroissance de la vitesse azimutale permet d'ajuster les niveaux absolus du bruit produit par un impact OBVI.

Influence de l'angle de contraction de la veine fluide

La figure 4.5 présente les résultats acoustiques pour l'OBVI d'un tourbillon de Lamb-Oseen avec et sans angle β . On remarque que l'angle de contraction de la veine fluide déséquilibre le chargement en opposition de phase. La directivité du bruit résultant est alors un dipôle acoustique suivant la classification donnée dans l'annexe E. La puissance acoustique totale est donc fortement augmentée lorsque l'angle β est incorporé aux résultats.

L'angle β change la *nature* de l'interaction suivant la classification BVI proposée par Coton *et al.* [27]. En effet, l'angle β transforme un impact orthogonal pur en impact oblique. Avec l'angle de contraction de la veine fluide, l'impact du tourbillon est transformé peu à peu en impact parallèle, acoustiquement très efficace [18].

Influence de la vitesse axiale du tourbillon

La figure 4.6 présente les résultats acoustiques pour la vitesse axiale seule. Le rayonnement acoustique est encore une fois de forme dipolaire. L'amplitude de la pression acoustique

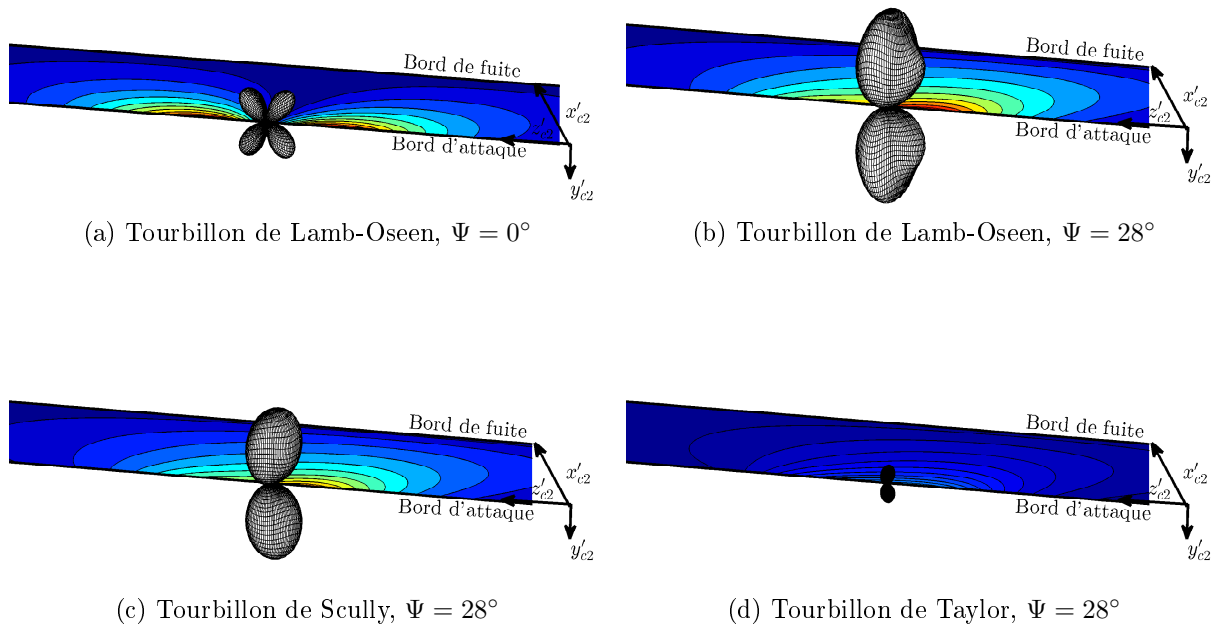


Figure 4.4 Directivité acoustique pour $|\hat{p}'_1|$ avec $\Psi = 0^\circ$ ou 28° et $\beta = 0^\circ$; l'observateur est situé à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$ mètre et les échelles sont identiques entre toutes les images. Le point de visualisation est situé à 40 m. du point $(0,0,0)$ en amont de l'impact et est aussi identique pour toutes les images. Les propriétés des événements OBVI sont données sur la figure 3.14.

émise par la vitesse axiale du tourbillon est du même ordre que le bruit émis en prenant en compte la vitesse azimuthale seule sans la contraction de la veine fluide β . Comme pour les résultats du chargement instationnaire illustrés à la figure 3.13, l'influence de l'angle β sur la vitesse axiale est minimale.

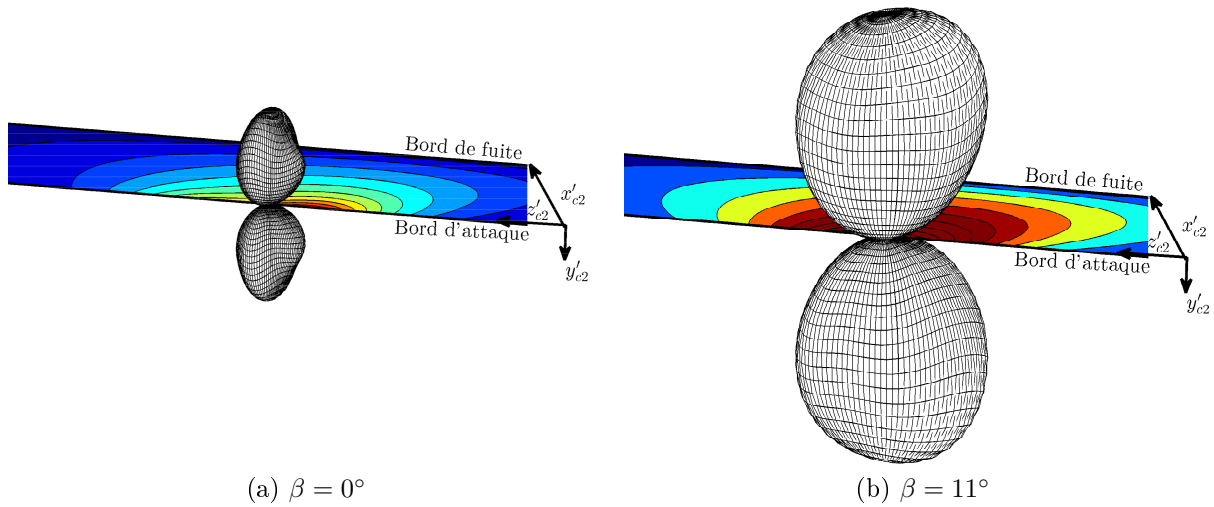


Figure 4.5 Directivité acoustique pour $|\hat{p}'_1|$, $\Psi = 28^\circ$ et β variable pour un tourbillon de Lamb-Oseen. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4.

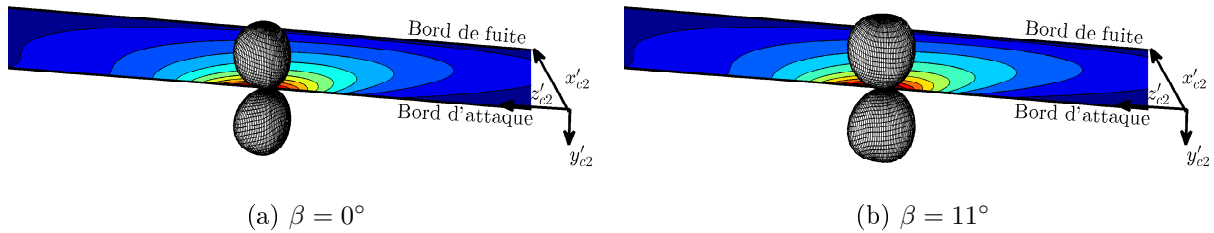
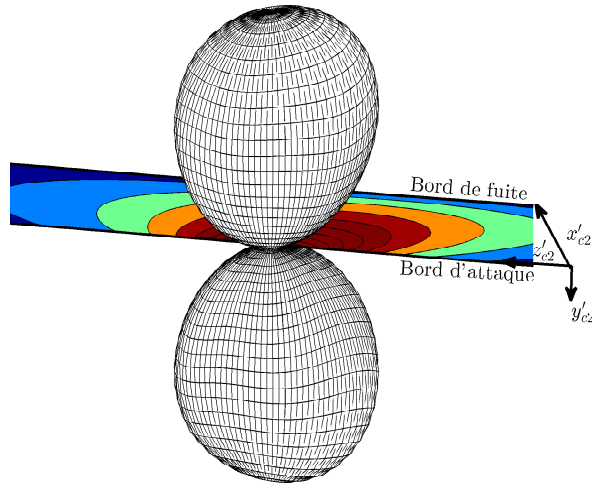


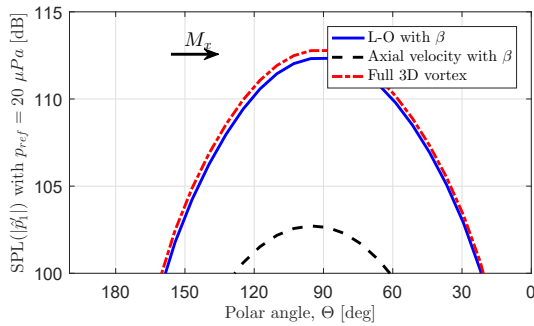
Figure 4.6 Directivité acoustique pour $|\hat{p}'_1|$ et β variable pour une vitesse axiale gaussienne du tourbillon. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4 et les paramètres pour la vitesse axiale sont indiqués à la figure 3.13.

Modèle 3D complet

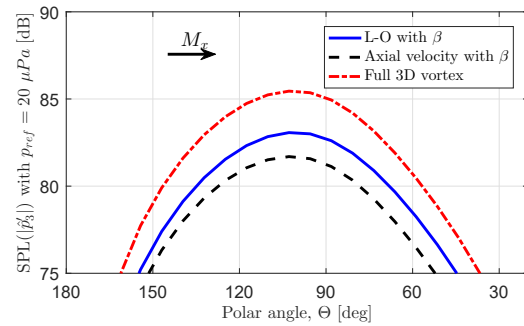
La figure 4.7a illustre le rayonnement pour un tourbillon de Lamb-Oseen avec angle β et vitesse axiale gaussienne. On observe que la rayonnement acoustique est principalement dipolaire. L'amplitude maximale est augmentée par rapport aux résultats de la figure 4.5b. La vitesse axiale ne joue pas beaucoup sur l'amplitude spectrale de \hat{p}'_1 . Cet effet est en accord avec les résultats de Zehner *et al.* [169] où le bruit en basses fréquences est dominé par la composante azimutale du tourbillon. Cependant, pour \hat{p}'_3 on remarque que la vitesse axiale est un contributeur significatif.



(a) Amplitude acoustique



(b) Coupe pour $|\hat{p}'_1|$ à $z_{c2} = 0$



(c) Coupe pour $|\hat{p}'_3|$ à $z_{c2} = 0$

Figure 4.7 Visualisations pour un tourbillon complet composé d'un tourbillon de Lamb-Oseen, d'un déficit de vitesse axial gaussien pour $\Psi = 28^\circ$ et $\beta = 11^\circ$. L'échelle et la position des observateurs sont indiqués sur la figure 4.4.

Influence de la condition aux limites au niveau du saumon de pale

La figure 4.8 illustre l'influence de la condition aux limites sur le saumon de pale. Cette fois, la pale est coupée au niveau du saumon, par conséquent la partie de la pale où $z_{c2} > 0$ est retirée des sources acoustique. La surface des sources est donc similaire à la figure 3.15. Dans ce cas-là l'intégrale de l'éq. (4.7) s'effectue de manière numérique par le biais d'une méthode des trapèzes. Cependant, comme on peut le remarquer sur la figure 3.5 la pression instationnaire diverge au bord d'attaque [8]. Or la force résultante est finie. Pour gérer la singularité, on utilise l'équation (4.16) où $2\Theta_1 \rightarrow \Delta x^* \Theta_1$ avec Δx^* la distance adimensionnelle de la première maille de la MCS et $\mathfrak{D} = 0$ puisqu'on ne considère aucune phase sur la propagation acoustique.

Les fluctuations de vitesse incidente utilisent le modèle de tourbillon 3D présenté à la figure 4.7a. On remarque que le bruit émis est alors purement dipolaire pour toutes les conditions aux limites. Pour la CL de type "infini" les résultats sont inférieurs à ceux de la figure 4.6 puisque les sources acoustiques pour $z_{c2} > 0$ sont supprimées.

De plus, on observe que la condition de Kutta réduit le rayonnement acoustique puisque les chargements instationnaires sont nuls au niveau du saumon. On remarque aussi que la condition de potentiel nul à l'extrémité de pale réduit aussi le rayonnement acoustique. Cependant, le rayonnement est réduit dans la direction normale à la pale, mais est légèrement augmentée dans la direction parallèle à la pale. Cet effet est vérifié par une coupe pour $z_{c2} = 0$ et illustré sur la figure 4.9. On remarque aussi qu'une condition aux limites de type bord de fuite rayonne plus en aval de la pale alors que la condition de type bord d'attaque rayonne plus en amont de la configuration pour les basses fréquences. On remarque par contre que les différences de niveau absolus entre les différentes conditions aux limites sont faibles. En effet, seulement 2 dB sont visibles entre les différents résultats pour les basses fréquences. En hautes fréquences (figure 4.9b) on remarque que le bruit rayonne plus facilement en amont de la configuration. On observe aussi que la condition d'annulation du potentiel atteint des niveaux de bruit inférieurs de 10 dB comparés aux autres conditions aux limites et la propagation acoustique est de plus en plus prononcée en amont de la configuration. Ces résultats sont valables pour une pale fixe, il faudrait comparer la propagation acoustique pour une pale de DHCR en rotation.

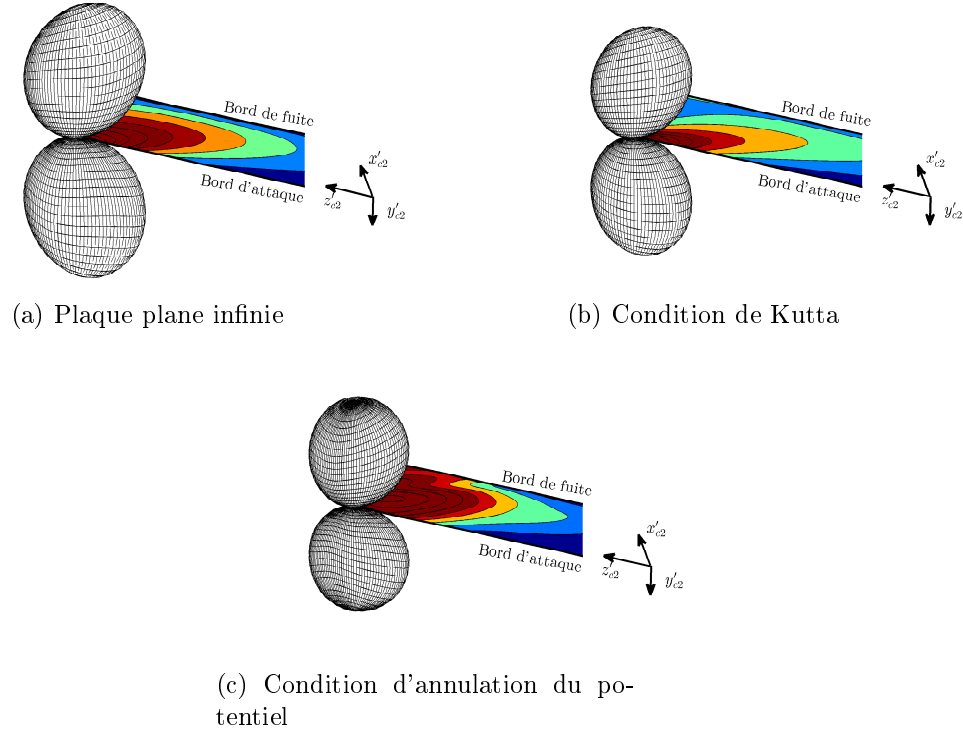


Figure 4.8 Directivité acoustique pour $|\hat{p}'_1|$, $\Psi = 28^\circ$ et $\beta = 0^\circ$ et un tourbillon 3D présenté à la figure 4.7a pour différentes conditions aux limites au niveau du saumon. Le point de visualisation est situé à 38 m. de l'origine des axes en amont de l'interaction. L'échelle est identique pour toutes les images.

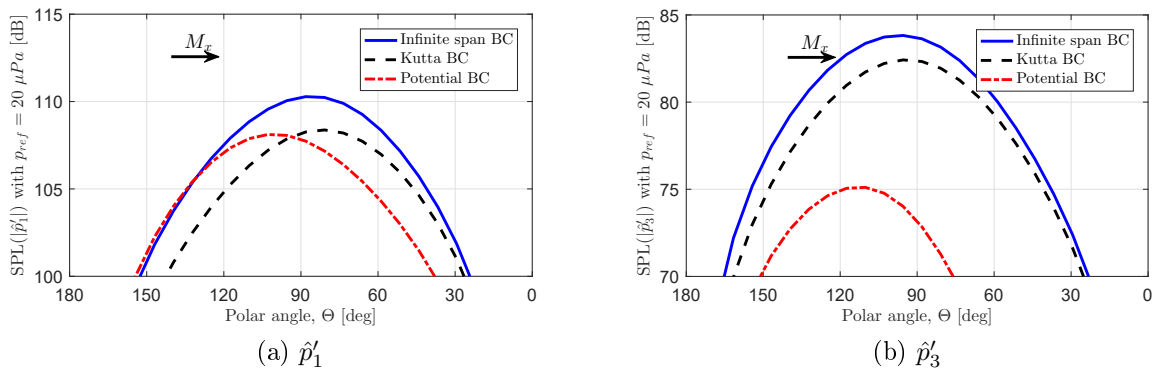


Figure 4.9 Comparaison de l'amplitude acoustique de l'OBVI pour différentes conditions aux limites à l'extrémité. Coupe pour $z_{c2} = 0$ m en utilisant les paramètres décrits sur la figure 4.8

4.3 Rayonnement acoustique d'une source en rotation

Dans un second temps, la formulation en dipôle tournant proposée par Hanson et Parzych [67] est utilisée. Cette formulation fréquentielle est totalement analytique quand l'observateur est en champ lointain acoustique. La démonstration complète du modèle est proposée dans l'annexe B.

La solution dans le domaine de Fourier pour une pale unique s'écrit à partir de l'éq. (B.35) :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{1,L}(\mathbf{O}, \omega) = \int_{S_r} \frac{-k e^{ik(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pm i n(\phi_s - \Phi) - i n \pi / 2} \\ \left\{ \tilde{P}_r(\omega_n) \frac{\sin \Theta_e}{D_c} J'_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) + i \left[\pm \tilde{P}_\phi(\omega_n) \frac{n}{k r_s} - \tilde{P}_x(\omega_n) \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right\} dS_r, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où l'observateur $\mathbf{O} = (R, \Theta, \Phi)$ est décrit dans le repère sphérique \mathfrak{R}_0 ; les indices e indiquent les coordonnées d'émission qui dans le cas d'un écoulement unidirectionnel \mathbf{e}_X dans \mathfrak{R}_0 s'obtiennent grâce aux équations (B.17) et (B.18) pour R_e et Θ_e respectivement. L'intégration est effectuée sur la surface S_r de la pale qui est choisie comme étant la MCS décrite dans la section 3.6.2. Chaque cellule de la MCS est décrite dans le repère \mathfrak{R}_0 , mais cette fois-ci en coordonnées cylindriques puisque ce type de repère est naturel pour les dipôles en rotation. S_0 est la distance source-observateur corrigée par la vitesse de convection (eq. (B.21)) ; D_c est le coefficient Doppler $D_c = (1 + M_X \cos \Theta_e)$ et $\tilde{\mathbf{P}}$ est la transformée de Fourier du chargement instationnaire normal à la pale. Cette solution est valable pour une unique pale soumise à un chargement instationnaire. Or reste à prendre en compte l'effet des B_2 pales et d'une série de tourbillons impactant une pale aval.

La figure 4.10 présente l'influence d'une fluctuation de vitesse contrarotative sur chaque pale aval. On remarque que chaque pale b_2 aura un chargement instationnaire, induit par la fluctuation de vitesse, similaire à la pale de référence ($b_2 = 0$) à un temps initial décalé par rapport à la pale aval de référence. Cet écart temporel s'écrit alors :

$$\Delta t_l = \frac{2\pi b_2}{B_2(|\Omega_1| + |\Omega_2|)}. \quad (4.26)$$

Il s'applique sur le chargement instationnaire et donc aux pulsations ω_m . On obtient donc :

$$\omega_m \Delta t_l = m B_1 (|\Omega_1| + |\Omega_2|) \frac{2\pi b_2}{B_2 (|\Omega_1| + |\Omega_2|)} = \frac{2\pi m B_1 b_2}{B_2}. \quad (4.27)$$

Pour B_1 pales amont et B_2 pales aval, on écrit alors [66] :

$$\tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = \sum_{b_2=0}^{B_2-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{p}'_{1,L}(\mathbf{O}, \omega) \exp \left(i 2\pi \frac{b_2}{B_2} (n + m B_1) \right). \quad (4.28)$$

La sommation sur les b_2 pales est non-nulle si et seulement si $n + m B_1$ est multiple de B_2 . La somme infinie des modes acoustiques n se réduit au final aux modes

$$\chi_{mn} = n B_2 - m B_1. \quad (4.29)$$

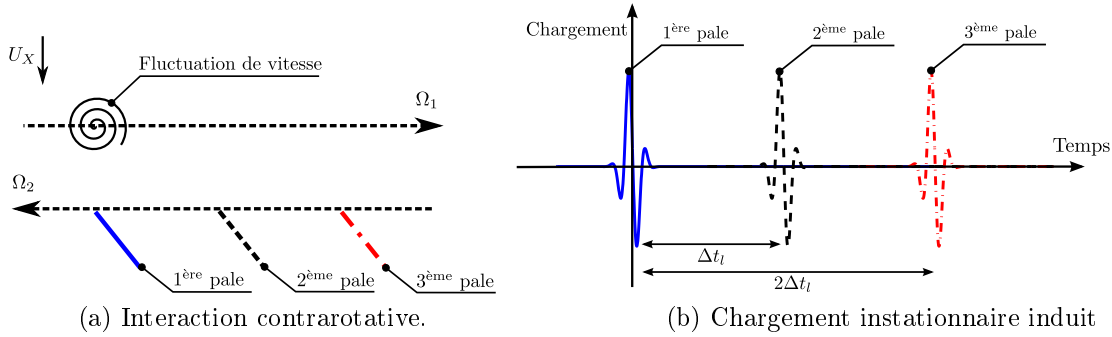


Figure 4.10 Chargement instationnaire lié à l'interaction canonique d'une fluctuation de vitesse contrarotative sur les 3 premières pales aval.

En utilisant l'écriture de l'éq. (3.40) prenant en compte l'impact d'une série de tourbillons périodique, alors la pression acoustique est alors une série harmonique dont les coefficients \tilde{p}'_{mn} s'obtiennent grâce à la propriété de la distribution de Dirac :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{mn}(\mathbf{O}, \omega_{mn}) = & \int_{S_r} \frac{-B_2 k_{mn} e^{i k_{mn} (R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} e^{\pm i \chi_{mn} (\phi_s - \Phi) - i \chi_{mn} \pi / 2} \left\{ \hat{P}_{r,m} \frac{\sin \Theta_e}{D_c} \right. \\ & \times J'_{\chi_{mn}} \left(\frac{k_{mn} r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) + i \left[\pm \hat{P}_{\phi,m} \frac{\chi_{mn}}{k_{mn} r_s} - \hat{P}_{x,m} \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_{\chi_{mn}} \left(\frac{k_{mn} r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \Big\} dS_r. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le nombre d'onde acoustique $k_{mn} = \omega_{mn}/c_0$ s'obtient à partir de la pulsation acoustique d'interaction

$$\omega_{mn} = \omega_m \mp \chi_{mn}\Omega_2 = mB_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|) \mp (nB_2 - mB_1)\Omega_2 = mB_1\Omega_1 \pm nB_2\Omega_2. \quad (4.31)$$

Le chargement instationnaire se compose des coefficients de Fourier aux harmoniques de charge $\hat{\mathbf{P}}_m = (\hat{P}_{x,m}, \hat{P}_{r,m}, \hat{P}_{\phi,m})$ et est écrit en coordonnées cylindriques dans le repère \mathfrak{R}_0 . L'amplitude spectrale de $\hat{\mathbf{P}}_m$ est reliée à l'éq. (3.41) alors que la direction du vecteur directeur est obtenue avec la MCS de la pale aval présentée à la figure 3.23.

L'équation (4.30) présente plusieurs caractéristiques. Les propriétés globales de la propagation acoustique sont présentées sur la figure 1.6. Les modes spiraux proviennent de la combinaison des fonctions de Bessel de première espèce avec les exponentielles complexes azimutales ($\exp(\pm i\chi_{mn}(\phi_s - \Phi))$). De plus, une étude préliminaire des fonctions de Bessel de première espèce, illustrée sur la figure 4.11, montre que l'argument de la fonction doit être supérieur ou égal à son ordre pour que la propagation acoustique soit efficace. Par conséquent, on obtient :

$$|\chi_{mn}| \leq \left| \frac{k_{mn}r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right|. \quad (4.32)$$

Lorsque $nB_2 - mB_1 = 0$ la fonction de Bessel associée a son maximum pour un argument nul. Par conséquent le bruit rayonne le long de l'axe de rotation. Cette propriété des DHCR ne se retrouve pas pour des rotors simples puisque les modes acoustiques sont toujours différents de zéro sauf s'il y a interaction avec une distorsion ou un effet d'installation par exemple. Cette explication fait particulièrement écho aux résultats trouvés par Stuermer et Yin [148] et illustrés sur la figure 1.1 où l'on remarque que le bruit d'interaction est particulièrement élevé pour des positions de microphones proches de l'axe de rotation.

4.4 Validation sur la configuration FL05/AL05

Les microphones sont placés dans une configuration en point de contrôle latéral présentés sur la figure 4.12. Ils sont placés à 20 m de l'axe de rotation du DHCR. La FL05/AL05 est une configuration 12x10 (12 pales pour $R1$ et 10 pales pour $R2$) en condition d'approche ($M_X = 0,2$) présentée en détail dans l'annexe A. L'axe de rotation est \mathbf{e}_X pointant vers l'aval du DHCR et coïncidant avec $\Theta = 0^\circ$.

Influence des paramètres d'entrées

La figure 4.13a présente les résultats pour différents modèles 2D de tourbillons. On observe les mêmes conclusions que pour la propagation avec une plaque plane fixe. Le choix du modèle de tourbillon 2D modifie principalement la valeur absolue des résultats, mais pas la directivité rayonnement. Pour les niveaux absolus, le tourbillon de Lamb-Oseen est le choix le plus approprié pour la configuration FL05/AL05. La figure 4.14 présente les résultats pour l'effet de la vitesse axiale uniquement et du tourbillon 3D avec encore une fois les mêmes conclusions que pour la plaque plane fixe.

La figure 4.15 présente l'influence de la condition aux limites au niveau du saumon. On observe que l'influence de la CL est plus forte en haute fréquence qu'en basse fréquence. Les différences entre les modèles sont faibles pour la majorité des positions de l'observateur (< 3 dB) cependant pour certaines positions (notamment pour $\Theta = 60^\circ$) la différence s'élève à 10 dB. Pour les hautes fréquences, on observe que la propagation acoustique dans le plan de rotation et en aval du DHCR est réduite de 10 dB comparé aux résultats pour un chargement instationnaire calculé sans condition aux limites à l'extrémité de pale. Pour la fréquence d'interaction fondamentale (1,1), on remarque que l'arc $\Theta \in [50, 70]$ est le plus affecté par la condition aux limites dans le cas de la FL05/AL05. 18 dB d'écart peuvent être observés entre la solution sans CL en envergure (*infinite span*) et la condition de Kutta pour la fréquence (1,2). Cette différence montre qu'il est fondamental de prendre en compte la CL en envergure pour la prévision acoustique.

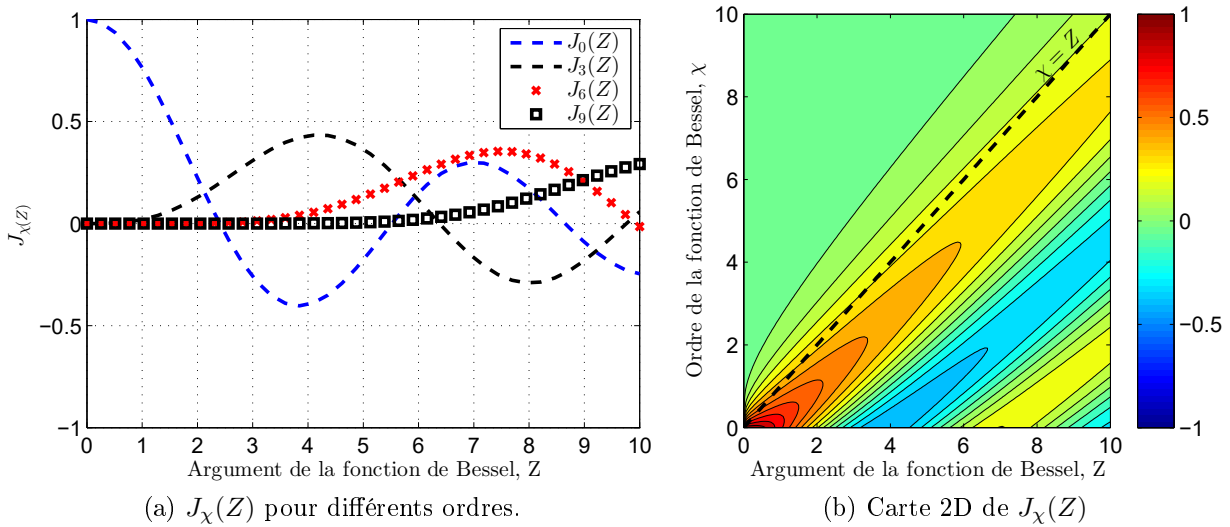


Figure 4.11 Évaluation canonique du comportement des fonctions de Bessel de première espèce $J_\chi(Z)$.

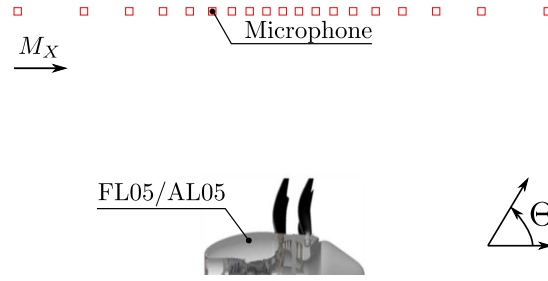


Figure 4.12 Positions des microphones pour la configuration retenue.

Le tableau 4.1 présente les résultats du tourbillon complet (angle de contraction de la veine fluide, vitesse azimutale de Lamb-Oseen et vitesse axiale gaussienne) quand les paramètres r_0 , u_θ^{max} et u_z^{max} varient de 25 % autour de la valeur obtenue au bord d'attaque du rotor aval. Ces variations ont été choisies pour correspondre à la marge d'erreur sur les caractéristiques du tourbillon obtenues par extrapolation à partir des résultats du domaine du rotor amont (*i.e* : simulation RANS). On remarque que le bruit n'est pas grandement modifié par les paramètres extraits du tourbillon. Au maximum 2,5 dB d'écart peuvent résulter si les paramètres sont obtenues avec une extrapolation des paramètres à 25 % des valeurs obtenus par calcul URANS. En pratique, à la lumière des résultats de la figure 2.18 les erreurs sur l'extrapolation des paramètres du tourbillon sont plus proches de 5 % que de 25 % ce qui donnera des différences négligeables sur le bruit émis. On pourra dans un dernier temps comparer ces résultats aux extractions numériques et expérimentales disponibles pour la FL05/AL05.

Cas testés	Fréquences d'interaction					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)
$0,75r_0$	-2,92	-2,86	-0,11	-2,35	-1,17	0,00
$1,25r_0$	2,63	2,63	0,00	1,70	0,00	0,00
$0,75u_\theta^{max}$ et $0,75u_z^{max}$	-2,5	-2,5	-2,5	-2,5	-2,5	-2,5
$1,25u_\theta^{max}$ et $1,25u_z^{max}$	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94

Tableau 4.1 Étude paramétrique de r_0 , u_θ^{max} et u_z^{max} sur le bruit émis. Les résultats présentés donnent l'écart sonore maximal (en dB) sur l'arc de microphone présenté à la figure 4.12 par rapport aux résultats du modèle OBVI de la figure 4.15 sans CL au niveau du saumon

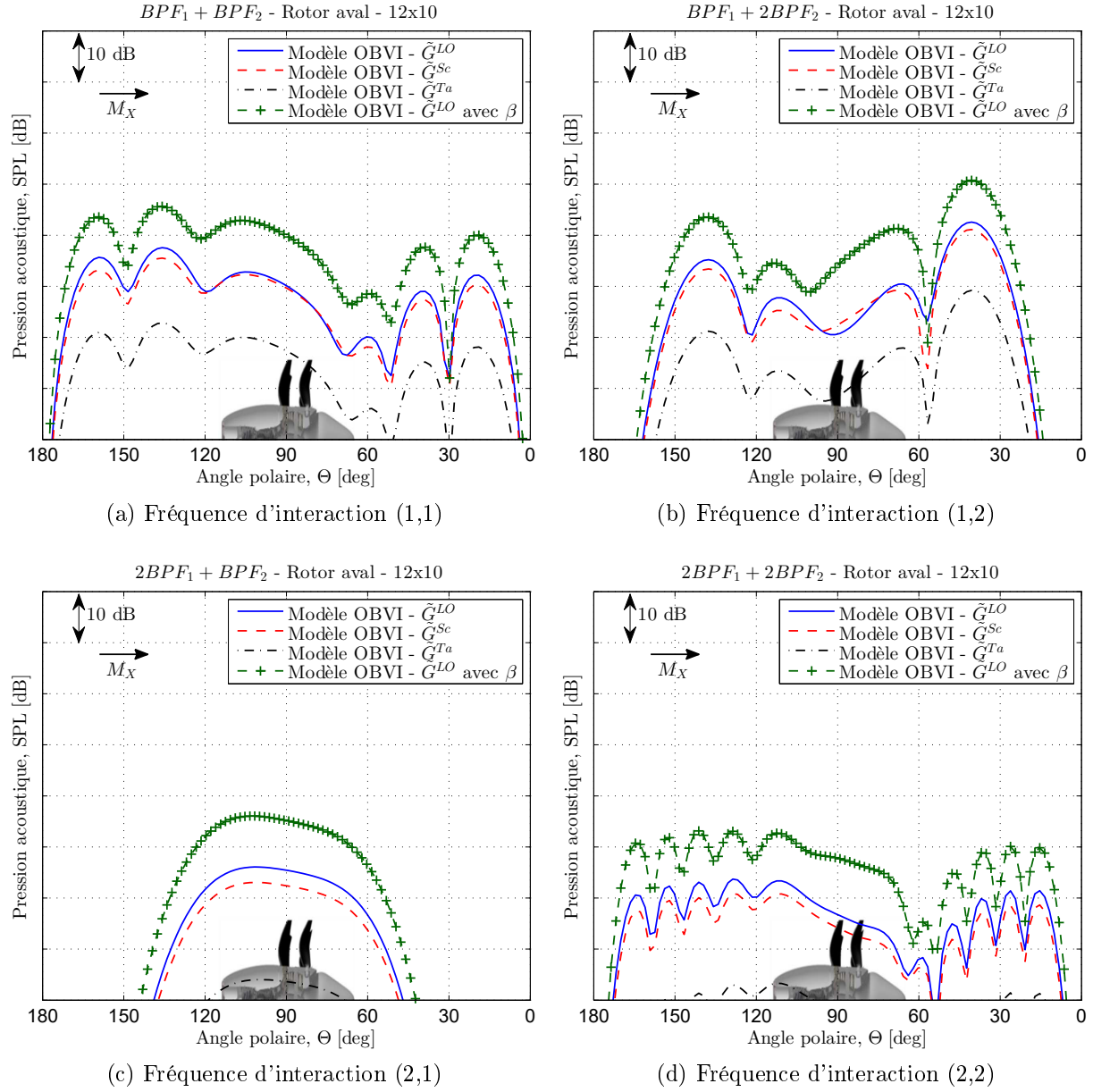


Figure 4.13 Influence du modèle de tourbillon sur le rayonnement acoustique.

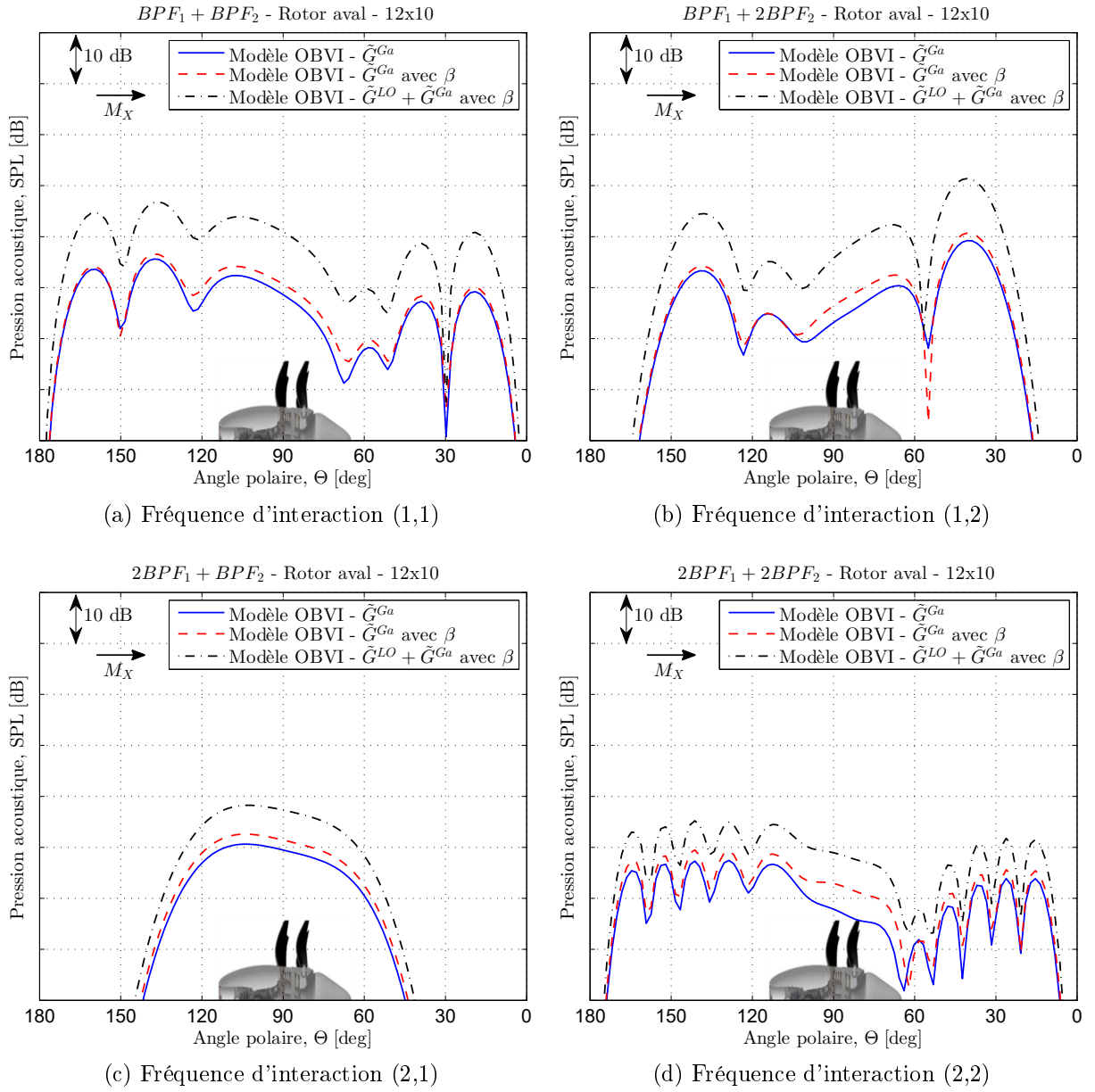


Figure 4.14 Influence de la vitesse axiale sur le rayonnement acoustique.

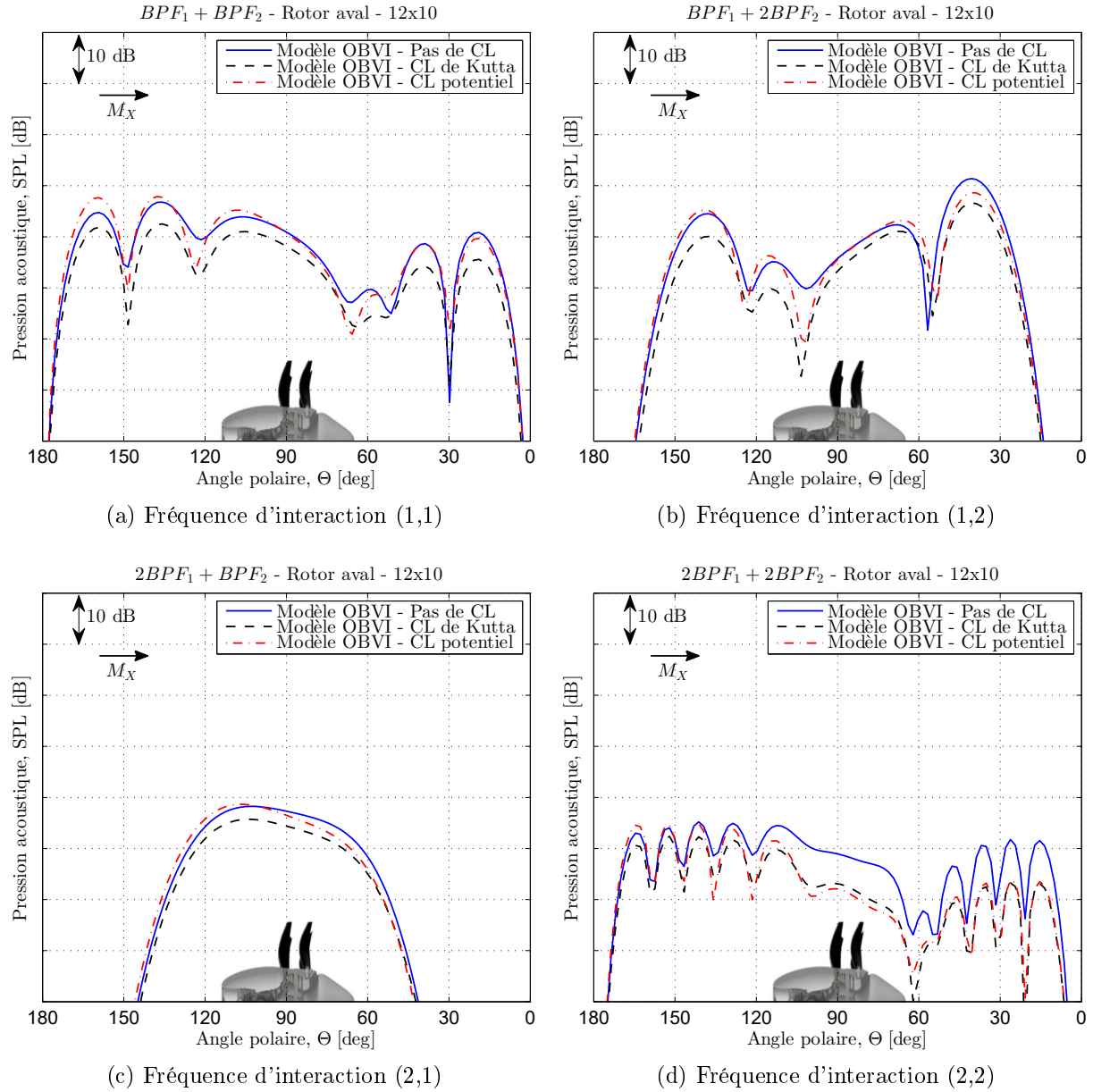


Figure 4.15 Influence de la condition aux limites en extrémité de pale sur la directivité du rayonnement acoustique.

4.4.1 Comparaison avec les résultats numériques et expérimentaux

La comparaison du modèle complet, proposé au chapitre 1.4, avec les résultats expérimentaux et les résultats acoustiques obtenus avec les sources acoustiques issues du calcul URANS est effectuée sur la figure 4.16. Les résultats pour l'impact du tourbillon, notés *OBVI model*, utilisent un tourbillon 3D (vitesse azimutale et vitesse axiale) et une condition aux limites de type annulation du potentiel de vitesse au niveau de l'extrémité de la pale. Ce modèle est couplé au modèle proposé par Carazo [19] pour la prévision tonale de l'impact de sillages de DHCR et notés *WBI model* (pour *Wake-Blade Interaction*). Les fluctuations de vitesse utilisées sont celles proposées à la figure 3.14. Le résultat des deux modèles est la solution notée *Complete model* qui fait la sommation décorrélée des deux mécanismes.

Les résultats *CFD loading* proviennent de la prévision acoustique obtenue avec le chargement instationnaire extrait du calcul URANS appliqué à la formulation de dipôle tournant de l'équation (4.30).

Le modèle OBVI avec condition d'annulation du potentiel a été sélectionné à la lumière des résultats de la figure 3.24. En effet les résultats du modèle analytique avec CL de type annulation du potentiel sont les plus proches des résultats numériques.

Les résultats numériques et analytiques sont calculés sur un maillage suffisamment raffiné pour assurer des résultats évitant les effets de non-compacité.

Les résultats expérimentaux (*Experiments*) sont ceux obtenus lors de la campagne d'essais ORPR effectuée dans la soufflerie NASA *Low-Speed Wind Tunnel* ou LSWT et précédemment présentés par Soulat *et al.* [141].

Dans un premier temps on remarque que les modèles Analytiques (Ana.) et Numérique (Num.) donnent des résultats globaux similaires aux résultats Expérimentaux (Exp.) pour la majorité des fréquences et des positions angulaires. De grandes différences peuvent être vues pour la fréquence (1,1) pour $\Theta \in [30^\circ, 60^\circ]$ où la pression acoustique est sous-prédite par les méthodes Ana. et numérique. Cet effet peut provenir du bruit produit par le rotor amont, de l'influence du tourbillon de bord d'attaque [56] où de l'influence de la réfraction sonore provoquée par la couche de cisaillement de la veine fluide du DHCR.

En revanche, les modèles Ana. et Num. prévoient des lobes acoustiques similaires. Les seules différences notables sont sur les résultats de la fréquence (1,1) pour $\Theta \in [50^\circ, 70^\circ]$ et (2,2) pour $\Theta \in [120^\circ, 170^\circ]$. Les différences principales sur le chargement instationnaire

entre les résultats Ana. et Num. proviennent de l'influence du tourbillon de bord d'attaque (figure 3.25). On peut aussi noter que la phase entre les contributions de sillages et des tourbillons n'est pas encore prise en compte. Par conséquent, la prise en compte de ces effets permettrait de rapprocher les résultats Ana. des prévisions numériques.

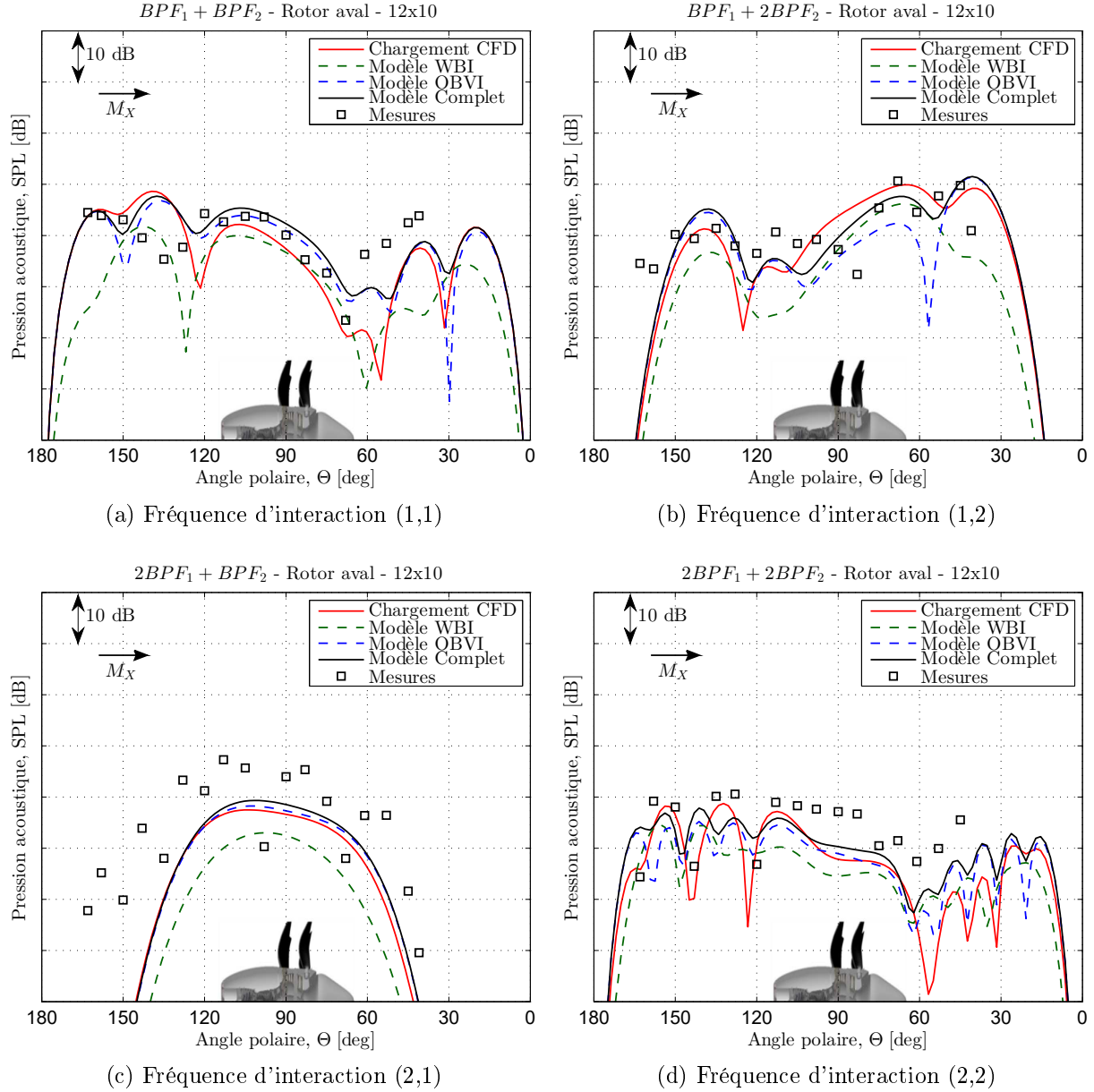


Figure 4.16 Directivités polaires des niveaux acoustiques pour la configuration FL05/AL05 comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats numériques pour différentes fréquences d'interaction.

Le tableau 4.2 présente l'importance relative d'un phénomène physique (sillage ou tourbillon) sur le bruit pour différents angles polaires d'observation (amont, plan de rotation

et aval) et différentes fréquences. Le mécanisme est dit *dominant* si, pour un angle Θ identique, la pression acoustique d'un modèle est supérieur à l'autre de plus de 3 dB. Pour la FL05/AL05 on remarque que globalement le mécanisme d'interaction avec le tourbillon est le bruit dominant (V. D. pour *Vortex Dominated*) pour la majorité des fréquences d'interactions. Cette source de bruit est particulièrement dominante pour des observateurs à l'amont ($\Theta \in [120^\circ, 180^\circ]$) ou à l'aval ($\Theta \in [0^\circ, 60^\circ]$) de la configuration. En revanche ce n'est pas vrai pour les observateurs situés dans le plan de rotation du DHCR ($\Theta \in [60^\circ, 120^\circ]$). Pour ces observateurs le bruit est très légèrement dominé par l'interaction avec les sillages (W. D. pour *Wake Dominated*). Toujours dans le plan de rotation, les résultats acoustiques du sillage et du tourbillon sont aussi souvent (30 % des cas) d'un ordre de grandeur identique (± 3 dB). Dans ces cas-là, la région est dite Mixte (Mix.). C'est particulièrement dans les régions mixtes que les effets d'interférences destructives ou constructives seront à examiner et donneront des résultats différents des résultats actuels.

On remarque d'autre part que certaines fréquences sont majoritairement dominées par l'interaction avec le tourbillon ((2,1) et (3,1) par exemple) alors qu'une seule est dominée par le sillage (2,2).

	Aval, $\Theta \in [0^\circ, 60^\circ]$			Plan de rotation, $\Theta \in [60^\circ, 120^\circ]$			Amont, $\Theta \in [120^\circ, 180^\circ]$		
Harm.	V. D.	Mix.	W. D.	V. D.	Mix.	W. D.	V. D.	Mix.	W. D.
(1,1)	61 %	27 %	12 %	9 %	91 %	0 %	67 %	18 %	15 %
(1,2)	82 %	3 %	15 %	18 %	6 %	76 %	79 %	21 %	0 %
(2,1)	100 %	0 %	0 %	62 %	38 %	0 %	100 %	0 %	0 %
(1,3)	100 %	0 %	0 %	44 %	50 %	6 %	88 %	6 %	6 %
(2,2)	18 %	27 %	55 %	0 %	41 %	59 %	31 %	36 %	33 %
(3,1)	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %
(2,3)	15 %	30 %	55 %	47 %	21 %	32 %	85 %	9 %	6 %
(3,2)	67 %	6 %	27 %	0 %	0 %	100 %	82 %	6 %	12 %
Total	60 %	12 %	28 %	34 %	30 %	36 %	76 %	13 %	11 %

Tableau 4.2 Importance relative du mécanisme responsable des niveaux de pression acoustique pour différentes positions observateurs. Le bruit émis est classé en trois catégories suivant la source acoustique majoritaire pour les résultats acoustiques : V. D. indique que le tourbillon est le mécanisme dominant, W. D. indique que le sillage domine et Mix. indique que les deux mécanismes ont des valeurs acoustiques similaires sur l'arc considéré.

Dans un dernier temps, les résultats acoustiques seront comparés à la méthode complète proposée par Carazo [19] où sillages et tourbillons ne sont pas séparés (figure 4.17). On remarque que les résultats ne sont pas significativement différents entre les deux modèles et ce pour toutes les fréquences. Pour la fréquence d'interaction fondamentale (1,1) le

modèle proposé par Carazo [19] donne de meilleurs résultats comparé au modèle proposé pour $\Theta \in [50^\circ, 70^\circ]$, alors que pour la fréquence (2,2) pour $\Theta \in [60^\circ, 90^\circ]$ le modèle proposé dans ce manuscrit semble plus approprié. Le principal avantage du modèle proposé dans ce manuscrit est que l'influence du sillage et celle du tourbillon peuvent être évaluées séparément et donner des résultats similaires à un modèle où tout est obtenu à partir de la CFD.

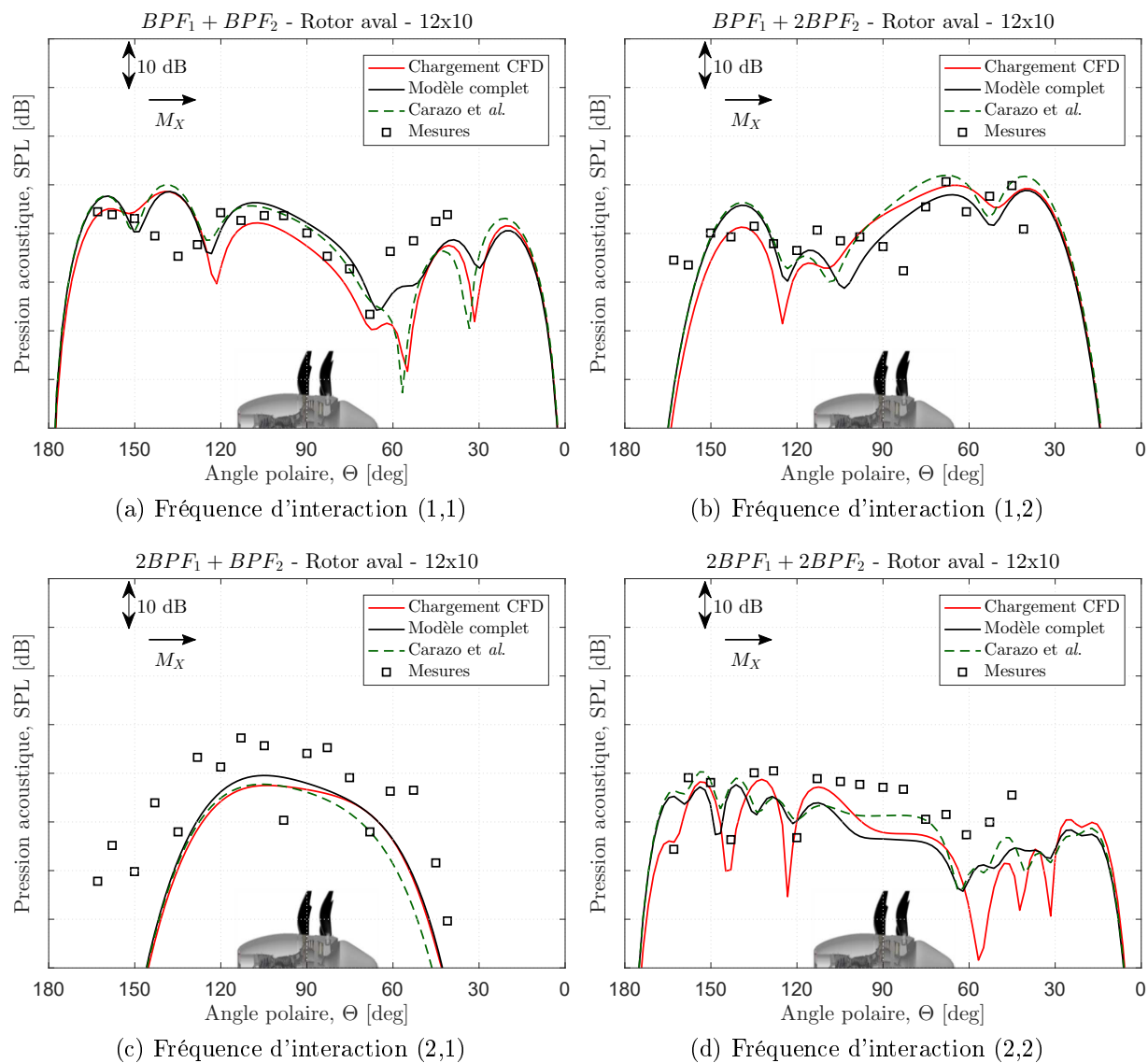


Figure 4.17 Directivités polaires des niveaux acoustiques pour la configuration FL05/AL05 comparées aux résultats expérimentaux et aux résultats numériques pour différentes fréquences d'interaction.

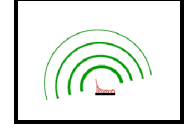
4.5 Conclusions

Dans cette partie, le bruit tonal d'interaction a été calculé grâce à une méthode semi-analytique.

Tout d'abord, la modélisation du tourbillon marginal prend en compte différents modèles de tourbillons ainsi que l'angle de contraction des lignes de courant. Ces caractéristiques ont d'abord été testées sur une pale fixe. Il s'avère que le modèle de tourbillon joue principalement sur le niveau absolu du bruit émis, mais très peu sur la directivité de ce bruit. En revanche, l'angle de contraction de la veine fluide a un impact très fort sur l'intensité et la directivité du bruit émis pour toutes les fréquences. Pour finir, différentes conditions aux limites au saumon de pale ont pu être testées. Ces CL jouent sur les niveaux sonores, mais aussi sur la directivité. Par rapport aux sources acoustiques calculées avec une CL infinie en envergure, le maximum des niveaux sonores est situé plus en aval avec la CL de Kutta et plus en amont avec la CL d'annulation du potentiel.

En utilisant la formulation en dipôle tournant proposée par Hanson et Parzych [67], on a accès au bruit tonal d'interaction produit par le rotor aval. Les résultats du modèle d'impact de tourbillon ont été calculés en même temps qu'un modèle d'impact de sillage (WBI) proposé par Carazo [19]. On remarque que le modèle complet donne des résultats convaincants une fois comparé aux résultats numériques et expérimentaux. Sillages et tourbillons semblent être suffisants pour calculer le bruit tonal d'interaction même s'ils sont considérés comme des sources acoustiques décorréliées. Les résultats du modèle présenté dans ce manuscrit sont similaires à ceux trouvés par la méthode semi-analytique proposée par Carazo [19].

CHAPITRE 5



BRUIT À LARGE BANDE POUR UN DOUBLET D'HÉLICES CONTRAROTATIVES

5.1 Introduction

Blandeau [13] a proposé des modèles semi-analytiques pour la prévision acoustique à large bande des DHCR. Sa méthodologie se compose du bruit d'impact des sillages turbulents (BRWI) et du bruit lié à l'interaction de la couche limite turbulente avec le bord de fuite des profils (BRTE). Le bruit d'impact des sillages turbulents se base sur un modèle proposé pour les turbomachines carénées [109].

Une hypothèse majeure du modèle BRWI est que l'angle de flèche des pales du rotor aval est nul ce qui n'est pas le cas pour les DHCR. Le modèle BRWI proposé par Blandeau *et al.* [14] sera donc amélioré pour prendre en compte l'angle de flèche.

Tout d'abord, on commencera par donner les points clefs de la formulation du modèle BRWI original en suivant les développements donnés par Kingan [79]. Par la suite, on incorporera l'angle de flèche et on observera les modifications sur le résultat final. Pour finir, deux configurations seront examinées. La première est une géométrie canonique proposée par Blandeau. Elle sera utilisée pour valider l'implémentation et étudier l'influence de l'angle de flèche. La deuxième configuration est la géométrie test FL05/AL05 présentée dans l'annexe A.

5.2 Bruit d'interaction de sillages turbulents (BRWI)

La section 1.5.2 présente les différents repères définis pour le calcul du modèle turbulent. Ces repères se basent sur la figure 1.14. Le point de départ du modèle BRWI provient encore de la formulation fréquentielle d'un dipôle tournant (équation (B.35)) :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = \int_{S_r} \frac{-k e^{ik(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pm i n(\phi_s - \Phi) - i n \pi / 2} \\ \left\{ \tilde{P}_r(\omega_n) \frac{\sin \Theta_e}{D_c} J'_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) + i \left[\pm \tilde{P}_\phi(\omega_n) \frac{n}{k r_s} - \tilde{P}_x(\omega_n) \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right\} dS_r, \end{aligned} \quad (5.1)$$

pour lequel tous les paramètres ont été décrits dans le chapitre précédent à l'équation (4.25).

5.2.1 Hypothèses géométriques et cinématiques

À partir de l'éq. (5.1) plusieurs simplifications sont rajoutées pour pouvoir calculer le bruit émis par le BRWI.

Tout d'abord, on ne considère que les composantes \mathbf{e}_Φ et \mathbf{e}_X et on néglige \tilde{P}_r puisque l'angle de dévers des pales est faible. Pour une plaque plane, infiniment fine, avec un calage χ_2 , la force élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, \omega_n) &= \text{sgn}(\Omega_2) \tilde{l} \mathbf{e}_{yc2} = -\text{sgn}(\Omega_2) (\mathbf{e}_X \sin \chi_2 + \mathbf{e}_\Phi \cos \chi_2) \tilde{l}(\mathbf{s}, \omega_n) \\ &= -\text{sgn}(\Omega_2) (\mathbf{e}_X \sin \chi_2 + \mathbf{e}_T \cos \chi_2) \tilde{l}(\mathbf{s}, \omega_n),\end{aligned}\tag{5.2}$$

avec \tilde{l} l'amplitude spectrale du saut de pression agissant sur une des pales du rotor aval. $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe usuelle. Les signes proviennent de la convention de l'annexe B où la normale est choisie sortante. Dans le cadre d'un compresseur (ou d'une soufflante), les efforts sont dirigés de l'intrados vers l'extrados. On notera que χ_1 et χ_2 peuvent prendre des valeurs positives ou négatives suivant la valeur de la vitesse de rotation $\Omega > 0 \rightarrow \chi > 0$.

De plus, on suppose que les caractéristiques géométriques et cinématiques sont constantes sur une petite bande de rayon de largeur Δr . Au niveau de \mathbf{X}_{ST} les grandeurs suivantes sont supposées constantes :

- les calages des pales des rotors amont et aval, respectivement χ_1 et χ_2 ,
- les longueurs de corde des pales des rotors amont et aval, respectivement $2b_1$ et $2b_2$,
- la vitesse de convection des rafales \mathbf{U}_{x2} dans la direction de la corde \mathbf{e}_{xc2} ,

Pour finir, sur le rotor aval, chacune des B_2 pales va être considérée comme des sources acoustiques non corrélées. On note i_2 l'indice de la pale considérée. Les pales sont supposées identiques et équiréparties en azimuth. Les coordonnées générales des sources \mathbf{s} et les coordonnées des plaques planes sont reliées par les équations suivantes (voir figure 1.13) :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x_s^{i_2} = x_{ST} + x_{c,2}^{i_2} \cos \chi_2 \\ r_s^{i_2} = z_{c,2}^{i_2} \\ \phi_s^{i_2}(z_{c,2}^{i_2}) = \phi_{ST} - x_{c,2}^{i_2} \frac{\sin \chi_2}{r_{ST}} + \frac{2\pi}{B_2} i_2 \end{pmatrix},\tag{5.3}$$

où $\mathbf{X}_{ST} = (r_{ST}, \phi_{ST}, x_{ST})$ est le centre de cette bande de rayon. Donc, la distribution de dipôles équivalents pour le rotor complet s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{R2} = -\text{sgn}(\Omega_2) \sum_{i_2=1}^{B_2} (\mathbf{e}_X \sin \chi_2 + \mathbf{e}_T \cos \chi_2) \tilde{l}^{i_2} \left(\begin{pmatrix} x_{ST} + x_{c,2}^{i_2} \cos \chi_2 \\ z_{c,2}^{i_2} \\ \phi_{ST} - x_{c,2}^{i_2} \frac{\sin \chi_2}{r_{ST}} + \frac{2\pi}{B_2} i_2 \end{pmatrix}, \omega_n \right). \quad (5.4)$$

Le calcul du chargement instationnaire utilise la méthode d'Amiet-Schwarzschild qui ne prend pas en compte la corrélation pales à pales pour le chargement ; cependant, la turbulence impactant le rotor aval peut être corrélée dans la direction \mathbf{e}_T . Pour cette raison, à cette étape du développement, le chargement est encore considéré comme corrélé (\tilde{l}^{i_2} à la place de \tilde{l}). Les équations (5.2) et (5.4) sont utilisées dans l'équation (5.1). Pour une bande de rayon (*i.e* $z_{c,2} \in [r_{ST} - \Delta r/2, r_{ST} + \Delta r/2]$), la pression acoustique est :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_L(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{-\text{sgn}(\Omega_2) i}{4\pi S_0} \sum_{i_2=1}^{B_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \tilde{l}^{i_2} (x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega_n) \\ &D_n(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega, \mathbf{O}) dz_{c,2}^{i_2} dx_{c,2}^{i_2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où $D_n(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega, \mathbf{O})$ rassemble tous les termes liés à la propagation acoustique :

$$\begin{aligned} D_n(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega, \mathbf{O}) &= k \left[\frac{\cos \Theta_e \sin \chi_2}{D_c} \mp \frac{n}{k z_{c,2}^{i_2}} \cos \chi_2 \right] J_n \left(\frac{k z_{c,2}^{i_2} \sin \Theta_e}{D_c} \right) \\ &\times e^{ikR_e \pm in(\phi_{ST} - \Phi) + i \frac{2\pi}{B_2} i_2 - i \kappa_n x_{c,2}^{i_2} - in \frac{\pi}{2} - ik \frac{\cos \chi_2 \cos \Theta_e}{D_c} x_{ST}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

et κ_n est le nombre d'onde dimensionnel défini par :

$$\kappa_n = \pm \frac{n \sin \chi_2}{r_{ST}} + k \frac{\cos \chi_2 \cos \Theta_e}{D_c}. \quad (5.7)$$

$\tilde{l}^{i_2} (x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega_n)$ est le saut de pression de la pale i_2 dans le repère attaché à la pale.

Puisque les sources sont turbulentes, un traitement statistique de la pression acoustique doit être effectué pour déterminer la densité spectrale de puissance de la pression acoustique S_{pp} . Cette grandeur se détermine grâce à la fonction d'autocorrélation temporelle R_{pp} définie par :

$$R_{pp}(\mathbf{O}, t, t') = \mathbb{E} [p_L(\mathbf{O}, t) p_L^*(\mathbf{O}, t')], \quad (5.8)$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique d'un processus aléatoire. On a alors :

$$S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} [\tilde{p}_L(\mathbf{O}, \omega) \tilde{p}_L^*(\mathbf{O}, \omega')] \exp i(\omega - \omega')t \, d\omega' dt. \quad (5.9)$$

La méthode pour obtenir la S_{pp} se base sur le théorème de Wiener-Khinchin et est appelée méthode du périodogramme. Elle suppose que le processus aléatoire est ergodique et stationnaire. Un processus est ergodique quand la moyenne temporelle se confond avec la moyenne statistique. Un processus stationnaire indique quant à lui que les propriétés statistiques de la turbulence ne sont pas modifiées au cours du temps.

5.2.2 Calcul des sources acoustiques

Dans l'équation (5.5), on remarque que l'opérateur d'espérance mathématique peut être déplacé sur le terme de charge \tilde{l}^{i_2} puisque les autres termes sont déterministes, on obtient alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{p}(\mathbf{O}, \omega) \tilde{p}^*(\mathbf{O}, \omega')] &= \frac{-1}{(4\pi S_0)^2} \sum_{i_2=1}^{B_2} \sum_{i'_2=1}^{B_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-b_2}^{b_2} \\ &\times \mathbb{E} \left[\tilde{l}^{i_2} (x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{l}^{*i'_2} (x_{c,2}^{i'_2}, z_{c,2}^{i'_2}, \omega' \pm n'\Omega_2) \right] \\ &\times D_n(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega, \mathbf{O}) D_{n'}^*(x_{c,2}^{i'_2}, z_{c,2}^{i'_2}, \omega', \mathbf{O}) \, dz_{c,2}^{i_2} dz_{c,2}^{i'_2} dx_{c,2}^{i_2} dx_{c,2}^{i'_2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dans l'éq. (5.10) reste à déterminer le terme source $\mathbb{E} [\tilde{l}^{i_2} \tilde{l}^{*i'_2}]$. Les sources acoustiques sont calculées avec l'éq. (3.35) sauf que la flèche du profil est ignorée dans un premier temps. La solution formelle du saut de pression est calculée pour une unique rafale de nombre d'onde vectoriel $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ dans le repère déroulé $\mathfrak{R}_p = (\mathbf{X}_{ST}, \mathbf{e}_{xc2}, \mathbf{e}_{yc2}, \mathbf{e}_{zc2})$. La pulsation est modulée par la rotation du rotor aval $\omega_n = \omega \pm n\Omega_2$. On rappelle aussi que :

- $U_1 = U_{x2}$ et $U_2 = 0$ sont les vitesses de l'écoulement moyen,
- $\beta_1 = \sqrt{1 - M_1^2}$ est le coefficient de compressibilité avec $M_1 = U_{x2}/c_0$ le nombre de Mach associé.

Dans la suite du développement, il est plus commode de séparer l'écriture de la réponse de la plaque des fluctuations de vitesse. Une écriture identique à l'équation (3.35) est :

$$l^{i_2}(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \mathbf{k}, t) = \pi \rho_0 U_{x2} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) g(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (5.11)$$

avec $g = g_{LE} + g_{LE}$ la fonction de réponse aérodynamique :

$$\begin{aligned} g_{LE}(x_{c2}, z_{c2}, \mathbf{k}, \omega) &= \frac{-2e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)}} \frac{e^{-i(\mu M_1 - \kappa)(x_{c2}^* + 1)}}{\sqrt{x_{c2}^* + 1}}, \\ g_{TE}(x_{c2}, z_{c2}, \mathbf{k}, \omega) &= \frac{2e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)}} e^{-i(\mu M_1 - \kappa)(x_{c2}^* + 1)} [1 - (1 + i)E^*(2\kappa(x_{c2}^* - 1))]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

La réponse complète de la plaque s'obtient par transformée de Fourier inverse. On obtient alors :

$$\tilde{l}(x_{c,2}^{i2}, z_{c,2}^{i2}, \omega) = \pi \rho_0 U_{x2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) g(x_{c,2}^{i2}, z_{c,2}^{i2}, \mathbf{k}, \omega) e^{ik_x x_{c2} + ik_y y_{c2} + ik_z z_{c2}} d\mathbf{k}, \quad (5.13)$$

La réponse de pale est déterministe donc on peut l'extraire de l'opérateur d'espérance. L'équation (5.10) devient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\tilde{l}(x_{c,2}^{i2}, z_{c,2}^{i2}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{l}^*(x_{c,2}^{i'2}, z_{c,2}^{i'2}, \omega' \pm n'\Omega_2) \right] \\ &= (\pi \rho_0 U_{x2})^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{G}^*(\mathbf{k}', \omega' \pm n'\Omega_2) \right] \\ &\quad \times g(x_{c,2}^{i2}, z_{c,2}^{i2}, \mathbf{k}, \omega \pm n\Omega_2) g^*(x_{c,2}^{i'2}, z_{c,2}^{i'2}, \mathbf{k}', \omega' \pm n'\Omega_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{c2} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'_{c2}} d\mathbf{k} d\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2.3 Sillages turbulents

Pour calculer le terme \tilde{G} , on considère à ce stade les sillages turbulents. Ces sillages sont produits dans le repère du rotor amont et sont décrits dans la section 2.4. La position d'une particule fluide \mathbf{x}^{i2} qui tourne avec le rotor amont à la pulsation Ω_1 dans le repère déroulé $\mathfrak{R}_{R1} = (\mathbf{X}_{ST}, \mathbf{e}_X, -\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_R)$ s'écrit :

$$\mathbf{x}^{i2} = \begin{pmatrix} x_1 - U_X \tau_e \\ t_1 \mp (|\Omega_1| + |\Omega_2|) r_1 \tau_e + \frac{2\pi r_1}{B_2} i_2 \\ r_1 = z_{c2} \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_{R1}}, \quad (5.15)$$

dans un référentiel en rotation avec le rotor aval à la pulsation Ω_2 . τ_e est alors le temps d'émission des sources acoustiques et l'égalité $r_1 = z_{c2}$ rappelle que la coordonnée dans le repère déroulé \mathfrak{R}_{R1} est identique à la coordonnée radiale dans \mathfrak{R}_0 écrit en coordonnées cylindriques. On remarque aussi que la direction tangentielle est choisie négative $-\mathbf{e}_T$ pour être en adéquation avec les nombres d'onde du problème de Schwarzschild (k_x, k_y, k_z) et rester un repère direct. Le terme de l'espérance du spectre des vitesses turbulentes

incidentes $\mathbb{E} \left[\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{G}^*(\mathbf{k}', \omega' \pm n'\Omega_2) \right]$ de l'éq. (5.14) s'écrit comme la transformée de Fourier spatio-temporelle de l'espérance des vitesses turbulentes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{G}^*(\mathbf{k}', \omega' \pm n'\Omega_2) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left[u(\mathbf{x}^{i_2}, \tau_e) u^*(\mathbf{x}^{i'_2}, \tau'_e) \right] \\ & \times \exp \left(i(\omega \pm n\Omega_2)\tau_e - i(\omega' \pm n'\Omega_2)\tau'_e - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}^{i_2} + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}^{i'_2} \right) d\tau_e d\tau'_e d\mathbf{x}^{i_2} d\mathbf{x}^{i'_2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Modulation des sillages

À partir de la section 2.4.2, la vitesse turbulente est modulée à l'aide d'une fonction. L'enveloppe de la turbulence des sillages est déterministe donc une fois de plus on peut les sortir de l'opérateur d'espérance :

$$\mathbb{E} \left[u(\mathbf{x}^{i_2}, \tau_e) u^*(\mathbf{x}^{i'_2}, \tau'_e) \right] = f(\mathbf{x}^{i_2}) f^*(\mathbf{x}^{i'_2}) \mathbb{E} \left[w(\mathbf{x}^{i_2}, \tau_e) w^*(\mathbf{x}^{i'_2}, \tau'_e) \right], \quad (5.17)$$

où w est la vitesse turbulente et f est la fonction de modulation décrite par l'éq. (2.75) pour un sillage unique. La fonction de modulation concernant l'ensemble des sillages s'écrit :

$$f(\mathbf{x}^{i_2}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(y) * \delta \left(t_1 - m \frac{2\pi r_1}{B_1} \right), \quad (5.18)$$

où f_1 est la fonction de modulation pour un seul sillage et y la distance par rapport au centre du sillage dans la direction \mathbf{e}_{yc1} du repère \mathfrak{R}_w . L'expression 5.18 se calcule en utilisant la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x + m2\pi/k_0) = \frac{k_0}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(mk_0) e^{-imk_0x}, \quad (5.19)$$

avec k_0 le nombre d'onde du phénomène physique considéré et \hat{f} la transformée de Fourier de $f(x)$. Si l'on considère le sillage gaussien de nombre d'onde ($k_0 = B_1/r_1$) alors la série de sillages devient :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{i_2}) &= \frac{B_1}{2\pi r_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{1,g} \left(m \frac{B_1}{r_1} \right) \exp \left(-im \frac{B_1}{r_1} t_1 \right) \\ &= \frac{B_1}{2\pi r_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\ln(2) \left[\frac{-\cos \chi_1 t^\circ + \sin \chi_1 x_1}{L_w} \right]^2 \right) e^{im \frac{B_1 t^\circ}{r_1}} e^{-i \frac{m B_1}{r_1} t_1} dt^\circ. \end{aligned}$$

D'après Gradshteyn et Ryzhik [61][3.323 éq.(2.10) p. 337], on obtient ainsi :

$$f(\mathbf{x}^{i_2}) = \frac{B_1}{2\pi r_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(r_1, \chi_1) \exp\left(im \frac{\tan \chi_1 B_1 x_1}{r_1}\right) \exp\left(-im \frac{B_1}{r_1} t_1\right), \quad (5.20)$$

avec :

$$f_m(r_1, \chi_1) = \frac{1}{B_1 \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad (5.21)$$

et :

$$\sigma(r_1, \chi_1) = \frac{r_1 \cos \chi_1 \sqrt{2 \ln(2)}}{B_1 L_w}. \quad (5.22)$$

Vitesse turbulente

La dernière étape consiste à déterminer l'espérance des vitesses turbulentes $\mathbb{E}[w^*w]$. En utilisant la vitesse de l'écoulement moyen des sillages turbulents $\mathbf{U}_{R1} = (U_X, \mp \Omega_1 r_1, 0)$ dans le repère déroulé \mathfrak{R}_{R1} et les éqs. (2.76) et (2.80), on écrit l'espérance des vitesses turbulentes avec le spectre des vitesses turbulentes :

$$\mathbb{E}\left[w(\mathbf{x}_{R1}^{i_2}, \tau_e) w^*(\mathbf{x}_{R1}^{i'_2}, \tau'_e)\right] = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww}(k_x, k_y, k_z) \exp(i\mathbf{k} \cdot (\eta_x \mathbf{e}_X + \eta_t \mathbf{e}_T + \eta_r \mathbf{e}_R)) d\mathbf{k}, \quad (5.23)$$

Φ_{ww} est le spectre des vitesses turbulentes défini pour une turbulence stationnaire, homogène, isotrope dans le chapitre 2.4.2 et $\boldsymbol{\eta}$ le vecteur entre deux particules fluides à corrélérer et écrites dans le repère déroulé \mathfrak{R}_{R1} :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_t \\ \eta_r \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_{R1}} = \begin{pmatrix} x_1 - x'_1 - U_X(\tau_e - \tau'_e) \\ t_1 - t'_1 \pm \Omega_1 r_1(\tau_e - \tau'_e) \\ r_1 - r'_1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_{R1}}. \quad (5.24)$$

Puisque la turbulence est périodique dans la direction \mathbf{e}_T , elle s'écrit grâce à la formule sommatoire de Poisson de l'équation (5.19) de périodicité $2\pi r_1$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[w(\mathbf{x}_{R1}^{i_2}, \tau_e) w^*(\mathbf{x}_{R1}^{i_2'}, \tau_e') \right] &= \frac{1}{2\pi r_1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \\ &\Phi_{ww}(k_x^\circ, k_y^\circ, k_z^\circ) \exp(i\mathbf{k}^\circ \cdot (\eta_x \mathbf{e}_X + \xi \mathbf{e}_T + \eta_r \mathbf{e}_R)) \exp\left(-i\frac{q}{r_1}(\xi - \eta_t)\right) d\mathbf{k}^\circ d\xi. \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec \mathbf{k}° un nombre d'onde arbitraire d'intégration différent de \mathbf{k} et \mathbf{k}' . On utilise alors les éqs. (5.17), (5.20) et (5.25) dans l'éq. (5.16) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{G}^*(\mathbf{k}', \omega' \pm n'\Omega_2) \right] &= \frac{1}{(2\pi)^9 r_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww}(k_x^\circ, k_y^\circ, k_z^\circ) \exp(i\mathbf{k}^\circ \cdot (\eta_x \mathbf{e}_X + \xi \mathbf{e}_T + \eta_r \mathbf{e}_R)) \exp\left(-i\frac{q}{r_1}(\xi - \eta_t)\right) d\mathbf{k}^\circ d\xi \\ &\times f(\mathbf{x}^{i_2}) f^*(\mathbf{x}^{i_2'}) \exp\left(i(\omega \pm n\Omega_2)\tau_e - i(\omega' \pm n'\Omega_2)\tau_e' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^{i_2} + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}^{i_2'}\right) d\tau_e d\tau_e' d\mathbf{x}^{i_2} d\mathbf{x}^{i_2'}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ces intégrales sont séparément résolues en inversant l'ordre des intégrations. Pour le terme ξ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_y^\circ \xi} e^{-iq/r_1(\xi - \eta_t)} d\xi = e^{iq\eta_t/r_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y^\circ - q/r_1)\xi} d\xi = 2\pi e^{iq\eta_t/r_1} \delta(k_y^\circ - q/r_1). \quad (5.27)$$

Pour les termes $d\mathbf{x}^{i_2} = dx_1 dt_1 dr_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im \tan \chi_1 B_1 x_1 / r_1} e^{i(k_x^\circ - k_x) x_1} dx_1 &= 2\pi \delta(k_x^\circ - (k_x - m \tan \chi_1 B_1 / r_1)), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-im B_1 t_1 / r_1 + iq/r_1 t_1 + ik_y t_1} dt_1 &= 2\pi \delta(k_y - (q - m B_1) / r_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z^\circ - k_z) r_1} dr_1 &= 2\pi \delta(k_z^\circ - k_z), \end{aligned}$$

et $d\mathbf{x}^{i_2'} = dx_1' dt_1' dr_1'$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x' x_1'} e^{-ik_x^\circ x_1'} e^{-im' \tan \chi_1 B_1 x_1' / r_1} dx_1' = 2\pi \delta(k_x' - (k_x^\circ + m' \tan \chi_1 B_1 / r_1)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'_y t'_1 - iqt'_1/r_1 + im'B_1 t'_1} dt'_1 = 2\pi\delta(k'_y - (q + m'B_1)/r_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'_z r'_1 - k_z^\circ r'_1} dr'_1 = 2\pi\delta(k'_z - k_z^\circ).$$

Les termes en temps d'émission τ_e et τ'_e sont écrits :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega \pm n\Omega_2)\tau_e} e^{-ik_x^\circ U_X \tau_e} e^{\pm iq\Omega_1 \tau_e} e^{-ik_y(|\Omega_1| + |\Omega_2|)r_1 \tau_e} d\tau_e$$

$$= 2\pi\delta(\omega \pm n\Omega_2 - k_x^\circ U_X \pm q\Omega_1 - k_y(|\Omega_1| + |\Omega_2|)r_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega' \pm n'\Omega_2)\tau'_e} e^{ik_x^\circ U_X \tau'_e} e^{\mp iq\Omega_1 \tau'_e} e^{ik'_y(|\Omega_1| + |\Omega_2|)r_1 \tau'_e} d\tau'_e$$

$$= 2\pi\delta(\omega' \pm n'\Omega_2 + k_x^\circ U_X \mp q\Omega_1 + k'_y(|\Omega_1| + |\Omega_2|)r_1)$$

On considère que les rotors amont et aval sont faiblement chargés ; alors, considérant la figure 5.1, les simplifications suivantes sont utilisées :

$$\frac{\tan \chi_1}{r_1} = \frac{\Omega_1 r_1}{U_X r_1} = \frac{\Omega_1}{U_X} \text{ et } \frac{\tan \chi_2}{r_1} = \frac{\Omega_2}{U_X}.$$

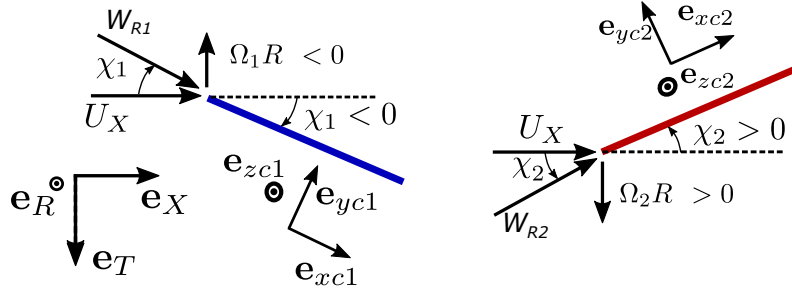


Figure 5.1 Simplification des vitesses relatives avec les angles de calage des pales.

5.2.4 Solution pour les sources acoustiques

En utilisant les éqs. (5.17) et (5.25) dans l'équation (5.14), on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\tilde{l}(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \omega \pm n\Omega_2) \tilde{l}^*(x_{c,2}^{i'_2}, z_{c,2}^{i'_2}, \omega' \pm n'\Omega_2) \right] &= \pi^2 \rho_0^2 B_1^2 \frac{U_{x2}}{z_{c,2}^{i_2} \cos \chi_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \\
&\times f_m(z_{c,2}^{i_2}, \chi_1) f_m^*(z_{c,2}^{i'_2}, \chi_1) \delta(\omega - [\omega' \mp (n - n')\Omega_2 \mp (m - m')B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)]) \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww}(K_{x,mn}, K_{y,mn}, k_r) \exp \left\{ +i \frac{2\pi}{B_2} [(q - n'B_1)m' - (q - nB_1)m] \right\} \\
&\times g(x_{c,2}^{i_2}, z_{c,2}^{i_2}, \mathbf{K}_s, \omega \pm n\Omega_2) g^*(x_{c,2}^{i'_2}, z_{c,2}^{i'_2}, \mathbf{K}'_s, \omega' \pm n'\Omega_2) \exp(-ik_r(z_{c,2}^{i_2} - z_{c,2}^{i'_2})) dk_r,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

avec $\mathbf{K}_s = (K_{x,n}, 0, k_r)$ et $\mathbf{K}'_s = (K_{x,n'}, 0, k_r)$ les nombres d'onde associés au chargement instationnaire. Les autres nombres d'onde s'écrivent :

$$\begin{cases} K_{x,n} = \frac{\omega \pm n\Omega_2}{U_{x2}} \\ K_{x,n'} = \frac{\omega \pm n\Omega_2 \mp (m - m')B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)}{U_{x2}} \\ K_{x,mn} = \frac{\omega \pm n\Omega_2 \mp mB_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)}{U_{x2}} \\ K_{y,mn} = K_{x,mn} \tan \chi_2 + \frac{q}{r_{ST} \cos \chi_2} \end{cases}$$

f_m peut s'écrire avec z_{c2} au lieu de r_1 puisque ces deux variables sont équivalentes. On remarque aussi que le nombre d'onde axial relié à la vitesse turbulente incidente ($K_{x,mn}$) n'est pas le même que le nombre d'onde axial utilisé pour le calcul des sources acoustiques ($K_{x,n}$). En effet, ces deux phénomènes physiques ne sont pas modulés par la même vitesse. La vitesse turbulente est modulée par la pulsation des deux rotors Ω_1 et Ω_2 alors que le chargement instationnaire n'est modulé que par la rotation de la pale aval.

5.2.5 Expression de S_{pp}

Finalement, la pression acoustique de l'éq.(5.10) est résolue grâce aux sources acoustiques obtenues par l'équation (5.28). La densité spectrale de pression acoustique moyenne calculé dans l'éq.(5.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{B_1^2 \rho_0^2}{4S_0^2} \sum_{i_2=1}^{B_2} \sum_{i'_2=1}^{B_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \\
&\times \exp \left(i(k' - k)R_e \mp i(n' - n)[\phi_{ST} - \Phi_e - \pi/2] + i\frac{2\pi}{B_2}[ni_2 - n'i'_2] \right) \\
&\times \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \frac{U_{x2}}{z_{x,2}^{i_2} \cos \chi_2} D_{m,n}^{i_2} D_{m',n'}^{i'_2} I_t \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, k_r) \\
&\times \exp \left\{ i\frac{2\pi}{B_2}[(q - n'B_1)m' - (q - nB_1)m] \right\} \exp(-ik_r(z_{c,2}^{i_2} - z_{c,2}^{i'_2})) \\
&\mathcal{L}_{n'}^*(\mathbf{K}'_s, \kappa'_n, \omega' \pm n'\Omega_2) \mathcal{L}_n(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega \pm n\Omega_2) dz_{c,2}^{i'_2} dz_{c,2}^{i_2} dk_r,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

avec κ_n le nombre d'onde lié à la propagation acoustique dans la direction \mathbf{e}_{xc2} indiquée à l'éq. (5.7) et $\mathcal{L}_n(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega)$ la fonction de transfert définie comme :

$$\mathcal{L}_n(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega \pm n\Omega_2) = \int_{-b_2}^{b_2} g(x_{c,2}^{i_2}, \mathbf{K}_s, \omega \pm n\Omega_2) \exp(-i\kappa_n x_{c,2}^{i_2}) dx_{c,2}^{i_2}, \tag{5.30}$$

$D_{m,n}^{i_2}$ la fonction de directivité est définie comme :

$$D_{m,n}^{i_2} = k f_m(z_{c,2}^{i_2}, \chi_1) \left[\frac{\cos \Theta_e \sin \chi_2}{D_c} \mp \frac{n \cos \chi_2}{k z_{c,2}^{i_2}} \right] J_n \left(\frac{k z_{c,2}^{i_2} \sin \Theta_e}{D_c} \right), \tag{5.31}$$

et I_t les termes temporels :

$$\begin{aligned}
I_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - [\omega' \mp (n - n')\Omega_2 \mp (m - m')B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)]) \exp(i(\omega - \omega')t) d\omega' dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i[\omega \mp (n - n')\Omega_2 \mp (m - m')B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)]t) dt \\
&= 2\pi \delta(n - n') \delta(m - m').
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Dans l'équation (5.29), on peut inverser les intégrales $dz_{c,2}^{i_2'}$ et dk_r . En supposant $\Delta r \rightarrow +\infty$ et puisque $\Psi = 0$ on a alors :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{r_d - \Delta r/2}^{r_d + \Delta r/2} \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, k_r) \exp(-ik_r(z_{c,2}^{i_2} - z_{c,2}^{i_2'})) dz_{c,2}^{i_2'} dk_r \\ & \approx 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k_r) \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, k_r) dk_r \\ & \approx 2\pi \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, 0). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Finalement, il est possible de simplifier les sommations sur le nombre de pales :

$$\sum_{i_2=1}^{B_2} \exp(i \frac{2\pi i_2}{B_2} (n - q + B_1 m)) = B_2. \quad (5.34)$$

À l'aide de différentes simplifications données par les éqs. (5.32), (5.33) et (5.34) la densité spectrale de puissance de la pression de l'éq.(5.29) on obtient :

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{\pi \rho_0^2 B_2^2 B_1^2}{2S_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \\ & \times \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \frac{U_{x2}}{z_{x,2}^{i_2} \cos \chi_2} (D_{m,n}^{i_2})^2 \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, 0) |\mathcal{L}_n^{i_2}(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega)|^2 dz_{c,2}^{i_2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Expression simplifiée de S_{pp}

Si l'on transforme la sommation en q par un indice équivalent $j = q - l - B_1 m$ alors l'éq. (5.35) devient :

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{\pi \rho_0^2 B_2^2 B_1^2}{2S_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \frac{U_{x2}}{z_{x,2}^{i_2} \cos \chi_2} (D_{m,n}^{i_2})^2 \\ & \times \Phi_{ww} \left(K_{x,mn}, K_{x,mn} \tan \chi_2 + \frac{mB_1 + n}{r_{ST} \cos \chi_2} + j \frac{B_2}{r_{ST} \cos \chi_2}, 0 \right) |\mathcal{L}_n^{i_2}(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega)|^2 dz_{c,2}^{i_2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

La somme suivant les indices turbulents intervient uniquement dans le spectre des vitesses turbulentes. En se rappelant que le spectre des vitesses turbulentes est défini comme la

transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation spatiale [éq. (5.25)] on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww} \left(K_{xm,n}, K_{xm,n} \tan \chi_2 + \frac{mB_1 + n}{r_{ST} \cos \chi_2} + j \frac{B_2}{r_{ST} \cos \chi_2}, 0 \right) = \\ & \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} R_{ww,0}(\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_t \mathbf{e}_t + \eta_z \mathbf{e}_z) \\ & \exp \left[i K_{x,mn} \eta_x + i \left(K_{x,mn} \tan \chi_2 + \frac{mB_1 + n}{B_2} + \frac{B_2 j}{r_{ST} \cos \chi_2} \right) \eta_t \right] d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

La permutation somme-intégrale permet, en utilisant la propriété fondamentale des peignes de Dirac d'obtenir :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp \left(i \frac{B_2 j}{r_{ST} \cos \chi_2} \eta_t \right) = 2\pi \frac{z_{c,2}^{i_2} \cos \chi_2}{B_2} \delta \left(\eta_t - 2\pi j \frac{z_{c,2}^{i_2} \cos \chi_2}{B_2} \right), \quad (5.38)$$

qui permet de réduire les intégrales suivant les 3 directions de l'espace :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww} \left(K_{xm,n}, K_{xm,n} \tan \chi_2 + \frac{mB_1 + n}{r_{ST} \cos \chi_2} + j \frac{B_2}{r_{ST} \cos \chi_2}, 0 \right) \\ & = \frac{z_{c,2} \cos \chi_2}{B_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} R_{ww,0} \left(\eta_x \mathbf{e}_x + 2\pi j \frac{B_2}{r_{ST} \cos \chi_2} \mathbf{e}_t + \eta_r \mathbf{e}_r \right) \\ & \times \exp \left[i K_{x,mn} \eta_x + i \left(K_{x,mn} \tan \chi_2 + \frac{mB_1 + n}{B_2} \right) 2\pi j \frac{B_2}{r_{ST} \cos \chi_2} \right] d\eta_x d\eta_r. \\ & = \frac{z_{c,2} \cos \chi_2}{B_2} \phi_{ww}^{(2)}(K_{x,mn}, 0), \end{aligned} \quad (5.39)$$

avec $\phi_{ww}^{(2)}$, le spectre des vitesses turbulentes 2D défini dans le chapitre 2.4.2. En injectant les dernières modifications du modèle dans l'expression de la densité spectrale de puissance des pressions acoustiques (éq. (5.35)), on obtient le modèle simplifié du bruit à large bande d'interaction sillage-rotor pour un DHCR :

$$\begin{aligned} S_{pp}^{simp}(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{\pi B_2 \rho_0^2 B_1^2 k^2}{2S_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \\ & \times \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} U_{x2} D_{m,n}^2 \Phi_{ww}^{(2)}(K_{x,mn}, 0) \left| \mathcal{L}_n^{i_2}(\mathbf{K}_s, \kappa_n, \omega) \right|^2 dz_{c,2}^{i_2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec :

$$D_{m,n} = f_m(z_{c,2}^{i_2}, \chi_1) \left[\frac{\cos \Theta_e \sin \chi_2}{D_c} \mp \frac{n \cos \chi_2}{k z_{c,2}^{i_2}} \right] J_n \left(\frac{k z_{c,2}^{i_2} \sin \Theta_e}{D_c} \right) \quad (5.41)$$

et le nombre d'onde κ_n :

$$\kappa_n = \pm \frac{n \sin \chi_2}{r_{ST}} + \frac{k \cos \chi_2 \cos \Theta_e}{D_c}. \quad (5.42)$$

5.3 Intégrale de rayonnement avec prise en compte de la flèche

L'angle de flèche est une caractéristique importante des géométries DHCR. Pour cette raison, on décide d'évaluer l'effet de la flèche dans la génération des sources acoustiques et dans la propagation acoustique. On utilise alors la figure 1.14b au lieu de la figure 1.14a pour représenter la bande de rayon. On suppose toujours que les bandes de rayon sont décorréliées les unes des autres. Les nombres d'onde $K_{x,n}$, $K_{x,mn}$ et k_r de la turbulence incidente sont identiques à ceux présentés dans l'éq. (5.28) puisque l'angle de flèche n'affecte pas la turbulence incidente. Par contre, les bornes d'intégration sur la bande de rayon sont modifiées. L'intégration dans la direction de la corde dépend de la position radiale. Le point de départ provient de l'expression de S_{pp} donnée à l'équation (5.29) :

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) &= \frac{B_1^2 \rho_0^2}{4S_0^2} \sum_{i_2=1}^{B_2} \sum_{i'_2=1}^{B_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \\ &\times \exp \left(i(k' - k)R_e \mp i(n' - n)[\phi_{ST} - \Phi_e - \pi/2] + i \frac{2\pi}{B_2} [ni_2 - n'i'_2] \right) \\ &\times \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \frac{U_{x2}}{z_{x,2}^{i_2} \cos \chi_2} D_{m,n}^{i_2} D_{m',n'}^{i'_2} I_t \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, k_r) \\ &\times \exp \left\{ i \frac{2\pi}{B_2} [(q - n'B_1)m' - (q - nB_1)m] \right\} \exp(-ik_r(z_{c,2}^{i_2} - z_{c,2}^{i'_2})) \\ &\times \int_{f_{dw}(z_{c,2}^{i'_2})}^{f_{up}(z_{c,2}^{i'_2})} \int_{f_{dw}(z_{c,2}^{i_2})}^{f_{up}(z_{c,2}^{i_2})} g^*(x_{c,2}^{i'_2}, \mathcal{MK}_s, \omega \pm n'\Omega_2) \exp \left(i\kappa'_n x_{c,2}^{i'_2} \right) \\ &\times g(x_{c,2}^{i_2}, \mathcal{MK}_s, \omega \pm n\Omega_2) \exp \left(-i\kappa_n x_{c,2}^{i_2} \right) dx_{c,2}^{i_2} dx_{c,2}^{i'_2} dz_{c,2}^{i'_2} dz_{c,2}^{i_2} dk_r, \end{aligned} \quad (5.43)$$

avec \mathcal{M} la matrice de rotation des nombres d'onde du repère \mathfrak{R}_p au repère $\mathfrak{R}_{p'}$ obtenue à partir de l'éq. (3.36) et :

$$f_{dw}(z_{c2}^{i2}) = \frac{-b_2}{\cos \Psi} + \tan \Psi(r_{ST} - z_{c2}^{i2}) \text{ et } f_{up}(z_{c2}^{i2}) = \frac{b_2}{\cos \Psi} + \tan \Psi(r_{ST} - z_{c2}^{i2}), \quad (5.44)$$

obtenus à partir de la figure 5.2.

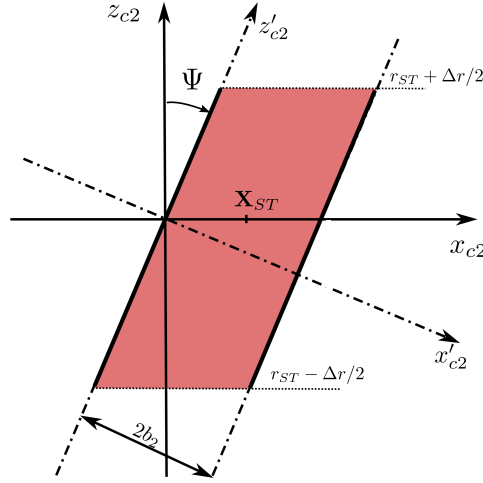


Figure 5.2 Bande de rayon avec prise en compte de la flèche.

La vitesse de convection des rafales reste dans la direction \mathbf{e}_{xc2} . On applique le changement de variable $\xi = x_{c2}^{i2} + \tan \Psi(r_{ST} - z_{c2}^{i2})$. Ce changement de variable est appliqué à l'équation (5.43). On n'écrit que les termes de phase suivant la direction radiale \mathbf{e}_{zc2} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{zc2} &= \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{-b_2/\cos \Psi}^{b_2/\cos \Psi} \int_{-b_2/\cos \Psi}^{b_2/\cos \Psi} \\ &\mathfrak{H}_{all} e^{-i(\kappa_n \tan \Psi + k'_r/\cos \Psi)(z_{c2}^{i2} - z_{c2}^{i'2})} d\xi d\xi' dz_{c2}^{i2} dz_{c2}^{i'2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

avec \mathfrak{H}_{all} le terme rassemblant les termes indépendants de $z_{c2}^{i'2}$ et :

$$k'_r = \sin \Psi K_{x,n} + \cos \Psi k_r, \quad (5.46)$$

obtenu grâce à l'équation (3.36). Comme pour l'éq. (5.33) en supposant $\Delta r \rightarrow +\infty$ on simplifie l'intégrale suivant la direction radiale. On obtient alors :

$$\mathfrak{Z}_{zc2} = 2\pi \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \int_{-b_2/\cos \Psi}^{b_2/\cos \Psi} \int_{-b_2/\cos \Psi}^{b_2/\cos \Psi} \mathfrak{H}_{all} \delta(\underbrace{(\kappa_n + K_{x,n}) \tan \Psi + k_r}_{k_\Psi}) d\xi d\xi' dz_{c2}^{i2}. \quad (5.47)$$

Cette équation signifie que seules les rafales parallèles au bord d'attaque rayonnent efficacement. Suivant la propriété des distributions de Dirac de l'éq. (1.10), l'intégrale sur les nombres d'onde radiaux vaut :

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}_{all}(k_r) \delta(k_\Psi(k_r)) dk_r = 2\pi \mathfrak{H}_{all}(-\tan \Psi(\kappa_n + K_{x,n})). \quad (5.48)$$

À partir de maintenant, les développements sont les mêmes que pour le cas sans flèche. Pour chaque nombre d'onde axial incident $K_{x,n}$ suivant la direction \mathbf{e}_{xc2} le nombre d'onde acoustiquement efficace est celui qui est parallèle au bord d'attaque du profil mis en flèche. Une condition nécessaire de validité du développement est que le résultat sans flèche soit retrouvé si $\Psi = 0^\circ$. Cette condition est respectée par le résultat proposé. L'expression de la densité spectrale de pression acoustique (S_{pp}) complète avec prise en compte de l'angle de flèche s'écrit :

$$S_{pp}(\mathbf{O}, \omega) = \frac{\pi \rho_0^2 B_2 B_1^2 k^2}{2S_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} \frac{U_{x2} \cos \Psi}{z_{x,2}^{i_2} \cos \chi_2} (D_{m,n}^{i_2})^2 \\ \times e^{i \tan \Psi (K_{x,n} + \kappa_n)(z_{c2} - r_{ST})} \Phi_{ww}(K_{xm,n}, K_{ym,n}, -\tan \Psi(K_{x,n} + \kappa_n)) |\mathcal{L}_n(\mathbf{K}'_s, \kappa_n, \omega)|^2 dz_{c,2}^{i_2}, \quad (5.49)$$

avec $\mathbf{K}'_s = (K_{x,n}, 0, -\tan \Psi(K_{x,n} + \kappa_n))$ le nombre d'onde des rafales incidentes modifié par l'angle de flèche. De la même manière que pour le cas sans flèche on peut obtenir :

$$S_{pp}^{simp}(\mathbf{O}, \omega) = \frac{\pi B_2 \rho_0^2 B_1^2 k^2}{2S_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{r_{ST}-\Delta r/2}^{r_{ST}+\Delta r/2} U_{x2} \cos \Psi D_{m,n}^2 \\ \times e^{i \tan \Psi (K_{x,n} + \kappa_n)(z_{c2} - r_{ST})} \Phi_{ww}^{(2)}(K_{x,mn}, -\tan \Psi(K_{x,n} + \kappa_n)) |\mathcal{L}_n(\mathbf{K}'_s, \kappa_n, \omega)|^2 dz_{c,2}^{i_2}. \quad (5.50)$$

La fonction de transfert dans la direction de la corde s'écrit :

$$\mathcal{L}_n(\mathbf{K}'_s, \kappa_n, \omega) = \int_{-b_2/\cos \Psi}^{b_2/\cos \Psi} g(\cos \Psi \xi, \mathbf{K}'_s, \omega \pm n\Omega_2) \exp(-i\kappa_n \xi) d\xi, \quad (5.51)$$

On se rappellera que les nombres d'onde incidents pour le calcul de la fonction de transfert sont exprimés dans le repère de la pale aval avec flèche $\mathfrak{R}_{p'}$. Ainsi on obtient :

$$\begin{cases} k'_x = \cos \Psi K_{x,n} + \sin \Psi (\tan \Psi (K_{x,n} + \kappa_n)) = \frac{K_{x,n} + \sin^2 \Psi \kappa_n}{\cos \Psi}, \\ k'_z = \sin \Psi K_{x,n} - \cos \Psi (\tan \Psi (K_{x,n} + \kappa_n)) = -\sin \Psi \kappa_n, \end{cases} \quad (5.52)$$

5.4 Résultats

5.4.1 Configuration canonique

Présentation de la géométrie

Dans un premier temps, pour valider l'implémentation de l'équation (5.40), un cas test a été utilisé et comparé à la littérature. La configuration canonique provient de Blandeau *et al.* [14]. Les paramètres d'entrée sont présentés dans le tableau 5.1.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
R	20 m	ρ_0	1,2 kg.m ⁻³	c_0	340 m.s ⁻¹
B_1	10	B_2	5	$\chi_1 = -\chi_2$	-45°
$\Omega_1 = -\Omega_2$	-170 rad.s ⁻¹	U_X	0 m.s ⁻¹	r_{ST}	1 m
Δr	0,2 m	U_{x2}	240 m.s ⁻¹	Λ	0,04 m
u'	0,02 U_{x2} m.s ⁻¹	L_w	0,095 m		

Tableau 5.1 Paramètres pour la configuration canonique pour le modèle BRWL.

Résultats sans flèche, $\Psi = 0^\circ$

Les résultats donnés par Blandeau *et al.* [14] concernent seulement la puissance acoustique (PWL). Cependant, les résultats seront donnés aussi pour la densité spectrale de puissance de la pression acoustique (PSD) à différentes fréquences.

En échelle logarithmique la PSD en bande fine se calcule comme :

$$\text{PSD} = 10 \log_{10} \left(\frac{2\Delta\omega S_{pp}}{p_{ref}^2} \right). \quad (5.53)$$

Ce résultat est donné en dB/Hz. Le facteur 2 provient de la prise en compte des fréquences négatives. $\Delta\omega = 2\pi$ provient du passage entre pulsation et fréquence. La pression acoustique de référence est le seuil d'audibilité à 1 kHz soit $p_{ref} = 20 \mu\text{Pa}$.

Pour obtenir la puissance acoustique (PWL) on intègre l'intensité acoustique sur une surface fermée (équation (E.6)). Blandeau *et al.* [14] a pris en compte l'influence de la vitesse de convection $U_X = M_X c_0$ dans le calcul de la puissance. On obtient alors :

$$P = \frac{2\pi R^2}{\rho_0 c_0} \int_0^\pi S_{pp} F_c(\Theta, M_X) \sin \Theta d\Theta. \quad (5.54)$$

avec :

$$F_c(\Theta, M_X) = \frac{\beta_X \sqrt{1 - M_X^2 \sin^2 \Theta}}{\left(\sqrt{1 - M_X^2 \sin^2 \Theta} - M_X \cos \Theta \right)^2}, \quad (5.55)$$

la fonction prenant en compte l'influence de la convection sur la puissance acoustique. On écrit alors la puissance acoustique en dB/Hz de la même manière que la PSD :

$$\text{PWL} = 10 \log_{10} \left(\frac{2\Delta\omega P}{P_{ref}} \right), \quad (5.56)$$

avec $P_{ref} = 10^{-12}$ Watt la puissance acoustique de référence.

La figure 5.3a présente les directivités sonores relatives pour 3 fréquences différentes (100, 1 000 et 7 000 Hz). Le 0 dB correspond à l'amplitude sonore obtenue à la fréquence considérée pour $\Theta = 90^\circ$. La figure 5.3b présente les résultats de la PWL. On observe que les deux codes sont identiques au dB près. De cette manière, on s'assure que le modèle analytique est correctement implémenté. Les formules asymptotiques en pointillés sont données par Blandeau *et al.* [14]. La position du maximum acoustique est déterminée par la taille moyenne des tourbillons incidents (Λ) et par les vitesses de rotation des deux rotors. La hauteur de ce pic est principalement déterminée par l'amplitude des rafales incidentes u' et leur vitesse de convection U_{x2} .

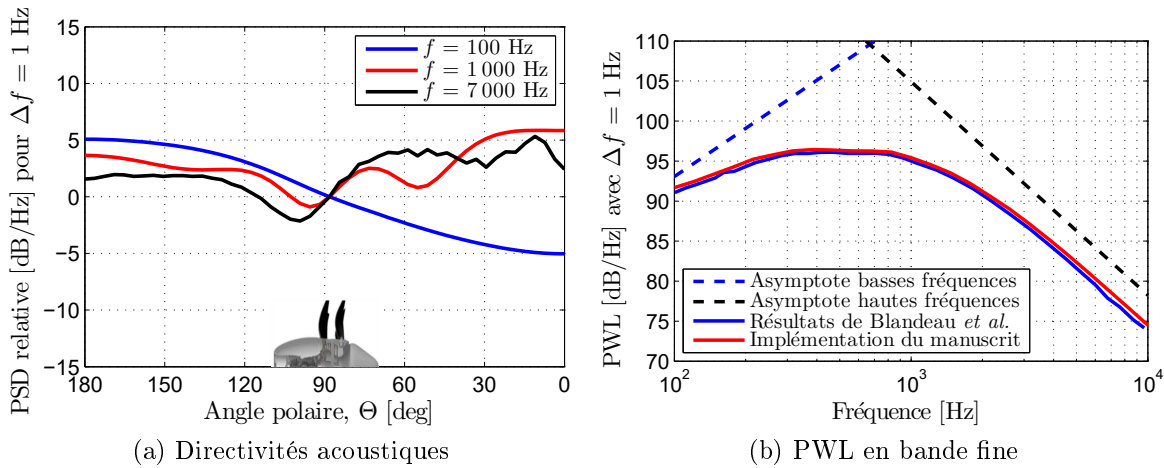


Figure 5.3 Résultats de la configuration canonique pour le BRWI [14].

Résultats avec flèche

La figure 5.4 présente les résultats des directivités et de la puissance pour le cas canonique où l'angle de flèche prend les valeurs de 10° et 20° . À basse fréquence on remarque que

la directivité est réduite pour un angle de 20° à l'aval de la configuration. La figure 5.4b montre que les niveaux de pression sont plus importants à l'amont de la configuration. Pour finir à haute fréquence on remarque que le bruit est fortement réduit à l'aval de la configuration. L'impact sur la puissance (figure 5.4d) est très limité, mais une baisse en basses et hautes fréquences est observée. Cette baisse provient de deux facteurs. Le premier est une réduction de la vitesse de convection des rafales U_{x2} . Le deuxième provient des nombres d'onde plus élevés associés aux rafales parallèles au nouveau bord d'attaque. Cependant, la baisse en basse fréquence peut aussi venir de l'approximation faite dans l'éq. (5.47) plutôt que d'une signification physique. Par conséquent, une comparaison avec un cas test serait nécessaire. Pour finir, on remarque que l'angle de flèche déplace légèrement le maximum de puissance vers les hautes fréquences.

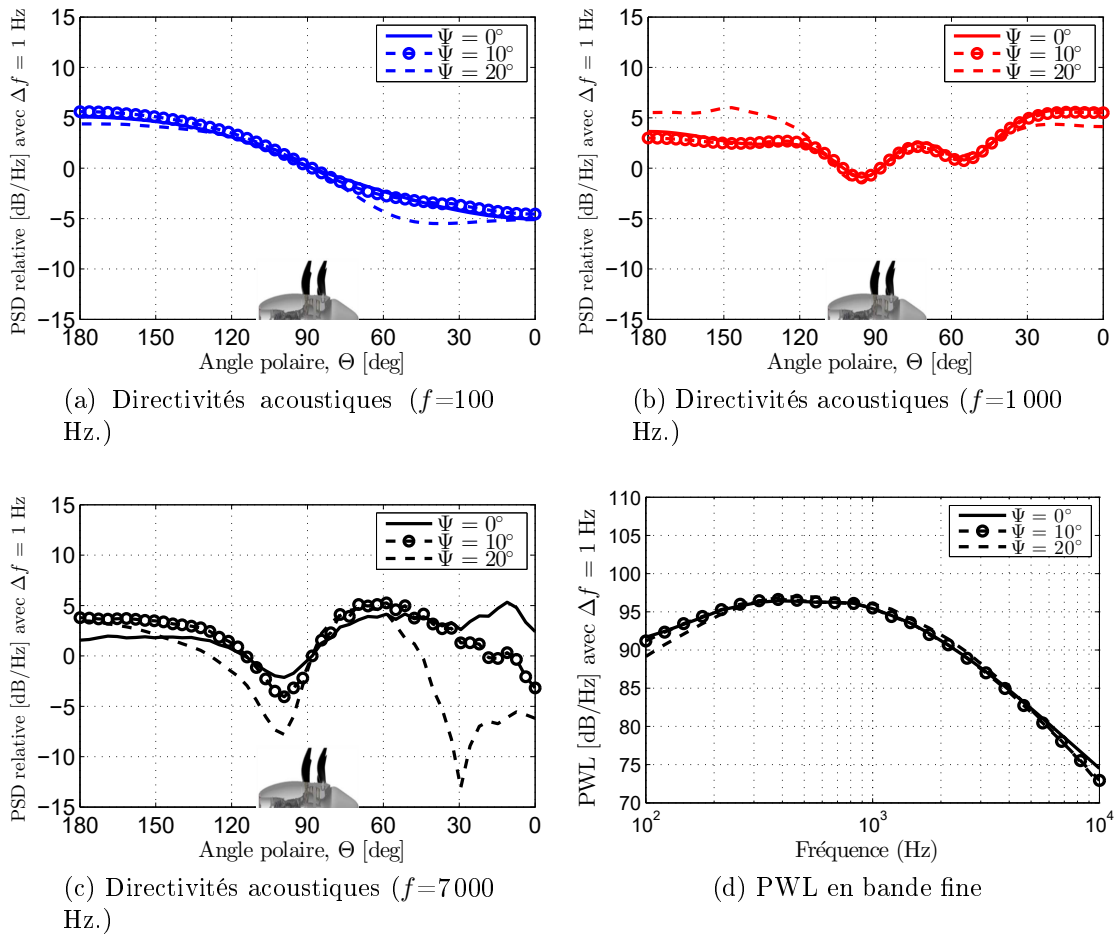


Figure 5.4 Étude paramétrique de l'angle de flèche pour le modèle BRWI.

5.4.2 Configuration FL05/AL05

La position des microphones est la même que pour le bruit tonal du chapitre 4. Le calcul du bruit s'est effectué avec 20 bandes de rayon. On s'assure ainsi que le calcul est convergé en nombre de bandes de rayon et que la largeur de cette bande est supérieure à l'échelle intégrale de la turbulence Λ . Cette dernière condition est fondamentale puisque chaque bande calcule le bruit de manière indépendante. La figure 5.5 présente les spectres pour 3 angles polaires : (30° , 90° et 140°). On remarque que les résultats originaux (BRWI raw) sont 10 dB en dessous des expériences. Cependant, on rappelle que l'énergie cinétique turbulente est en dessous d'autres géométries DHCR à des points de fonctionnement similaires (figure 2.29b). Si l'on considère que l'intensité turbulente est calculée à partir de la vitesse absolue et non pas de la vitesse relative, on obtient les résultats (BRWI *rescale*).

Ces résultats sont proches des expériences pour les positions polaires 90° et 150° (± 3 dB). De plus, la décroissance en haute fréquence est particulièrement bien prédite par le modèle pour toutes les valeurs de l'angle polaire. Des écarts de l'ordre de 5 à 8 dB ont aussi été trouvés pour certaines directivités en hautes fréquences avec d'autres DHCR [168]. Ces différences peuvent provenir des simplifications du modèle BRWI comme l'absence du dipôle radial, de la turbulence de fond ou de l'impact de la turbulence contenue dans le tourbillon marginal du rotor amont.

On remarque que l'influence de l'angle de flèche est très faible pour la plupart des résultats. Une légère amélioration de la décroissance en haute fréquence peut-être vue pour $\Theta = 150^\circ$. Cependant, cette amélioration devrait être validée avec d'autres positions polaires et différents DHCR.

La grande différence vue en basse fréquence (100-1 000 Hz) provient du mécanisme physique considéré. Blandeau [13] a montré que le bruit à basse fréquence provient du BRTE pour tous les points de fonctionnements considérés (décollage, croisière et approche). Ce bruit dans le futur doit donc être modélisé.

5.5 Conclusions

Concernant la prévision du bruit à large bande, la méthode semi-analytique pour l'impact des sillages turbulents (BRWI) proposée par Blandeau et Joseph [15] a été utilisée et implémentée avec succès.

Cette méthode prend maintenant en compte l'angle de flèche qui est l'une particularités géométriques principales des DHCR. Cependant l'impact sur le bruit émis est très

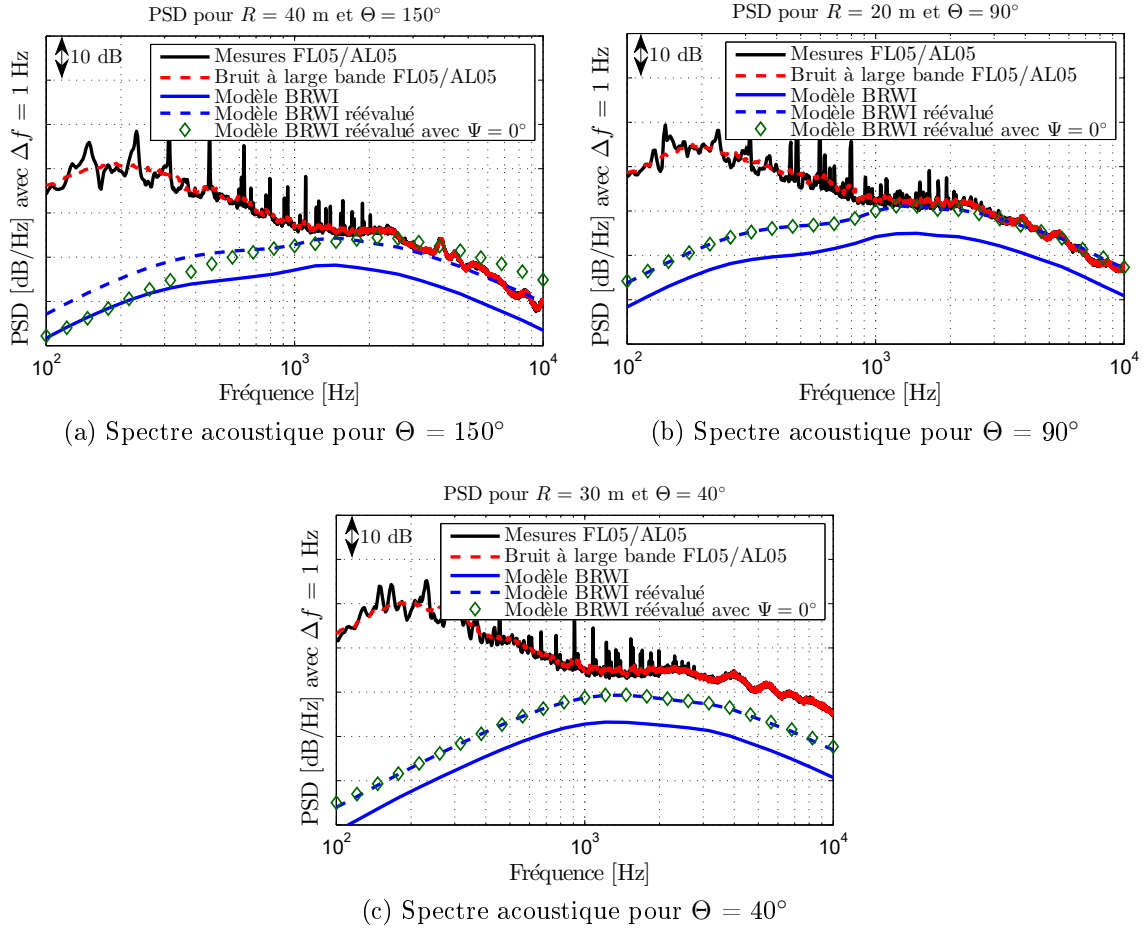


Figure 5.5 Résultats acoustiques pour la configuration FL05/AL05, PSD en bande fine ($\Delta f = 1$ Hz).

limité. En effet, pour la configuration canonique 3 dB de différence peuvent être vus sur la puissance acoustique totale. Une légère amélioration peut être vue pour la configuration FL05/AL05 pour un microphone en amont de la configuration. Cette légère amélioration devrait être validée par comparaison avec différents DHCR et positions polaires avant de conclure sur l'importance de l'angle de flèche sur le BRWI.

On observe une différence de 10 dB sur le microphone en aval de la configuration. Cette différence peut provenir des différentes approximations utilisées pour modéliser le BRWI analytiquement, notamment le dipôle radial ou la turbulence de fond. Cette différence peut aussi provenir d'un mécanisme à large bande non modélisé comme l'impact de la vitesse turbulente dans le tourbillon marginal provenant du rotor amont.

Enfin, il apparaît essentiel pour la condition d'approche de considérer le BRTE puisque les émissions sonores sur la plage de fréquence (100-1 000 Hz) n'est pas en accord avec le résultat du modèle BRWI.

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

6.1 Conclusions

Dans ce manuscrit, une méthodologie de prévision semi-analytique du bruit tonal et à large bande des configurations DHCR a été présentée. Cette méthode calcule le bruit tonal en utilisant l'impact des sillages et des tourbillons marginaux provenant du rotor amont sur le rotor aval. Pour la configuration FL05/AL05, les résultats obtenus sont globalement fiables ($\approx 5dB$) par rapport aux résultats obtenus avec le chargement instationnaire d'un calcul URANS. Si l'OBVI est le mécanisme dominant du bruit tonal et que les propriétés cinématiques du tourbillon marginal sont connues le modèle calcule le bruit émis en moins de 3 minutes sur un ordinateur muni de 8 processeurs. Le bruit à large bande est calculé à partir d'un modèle semi-analytique proposé par Blandeau *et al.* [14]. Ce modèle est modifié pour prendre en compte l'angle de flèche de la pale aval. Cette modification améliore globalement la qualité des résultats acoustiques pour la FL05/AL05 sans pénaliser les temps de calcul. Si les caractéristiques cinématiques des sillages sont connus, le modèle calcule le bruit à large bande en une dizaine de minutes sur le même ordinateur que le bruit tonal.

6.1.1 Bruit tonal

Le tourbillon est correctement modélisé en extrayant les vitesses et la trajectoire du tourbillon depuis un calcul URANS et en reproduisant les variations de vitesse du calcul URANS avec des modèles de tourbillons isolés issus de la littérature. La modélisation du tourbillon s'est portée sur un tourbillon 3D prenant en compte non seulement la vitesse azimutale, mais aussi le déficit de vitesse axiale du tourbillon. La vitesse azimutale peut être modélisée en utilisant des modèles avec ou sans circulation totale qui modifie la décroissance de vitesse azimutale au-delà du rayon visqueux. Les conclusions sur la modélisation du tourbillon sont :

1. Les vortex avec circulation totale modélisent plus adéquatement les tourbillons marginaux d'un DHCR.

2. Le déficit de vitesse axial est du même ordre de grandeur que la vitesse azimutale et ne peut pas être négligé.
3. La vitesse radiale fluctue dans la direction azimutale autour d'une valeur moyenne nulle.

Dans un second temps, une méthodologie de découplage des fluctuations de vitesse issues des résultats CFD a été proposée pour utiliser les résultats d'extraction du tourbillon avec les études précédentes concernant les sillages. Même si la méthode de découplage n'est pas optimale, il s'avère que les résultats sur la configuration FL05/AL05 sont convaincants. Une amélioration du découplage sillage-tourbillon est proposée ci-après dans les perspectives.

À partir des fluctuations de vitesse périodiques, le chargement instationnaire subit par la pale aval est modélisé avec la méthode analytique d'Amiet-Schwarzschild. Cette méthode convient aux pales de DHCR et permet d'obtenir une comparaison satisfaisante du chargement instationnaire comparé aux données issues d'un calcul URANS. Les paramètres d'entrée pour le calcul du chargement instationnaire prennent en compte les caractéristiques locales de l'interaction entre la pale et le tourbillon exception faite de l'angle de dévers. Dans ce manuscrit, l'angle de contraction de la veine fluide et l'influence de différentes conditions aux limites à l'extrémité de pale sont les nouveaux paramètres à l'étude. Les conclusions sur le chargement instationnaire issu de l'OBVI sont :

1. L'influence de la condition aux limites au niveau du saumon de pale permet d'obtenir des résultats significativement différents comparés aux méthodes infinies en envergure usuelle et ce peu importe le type de condition aux limites utilisée.
2. La condition aux limites de type bord d'attaque permet d'obtenir une pale fortement chargée au niveau de l'extrémité de pale.
3. Le tourbillon de bord d'attaque semble être mis en évidence sur les extractions du calcul numérique et semble modifier les résultats du chargement instationnaire.

La pression acoustique émise par l'impact du tourbillon peut enfin être calculée. Cette partie est effectuée en deux temps. Tout d'abord sur une plaque fixe puis sur une plaque tournante. Sur la plaque fixe, les résultats sont :

1. L'angle de contraction de la veine fluide est le paramètre géométrique modifiant le plus l'amplitude et la directivité du bruit émis.

2. Pour de faibles harmoniques de charge, les types de conditions aux limites au niveau du saumon réduisent l'émission sonore par rapport aux résultats acoustiques issus d'un chargement calculé sans condition aux limites au niveau du saumon.
3. Toujours pour de faibles harmoniques de charge, la CL de type bord de fuite (condition de Kutta) au niveau saumon rayonne plus en aval du profil alors que la CL de type bord d'attaque (annulation du potentiel) rayonne plus en amont du profil.

Lorsque la pale est en rotation, les conclusions sont :

1. La circulation du modèle de tourbillon joue principalement sur l'amplitude du bruit émis avec une dynamique de 20 dB.
2. La CL au niveau du saumon permet de changer la dynamique des résultats d'une hauteur de 5 dB.
3. Si l'on combine les résultats acoustiques du modèle OBVI avec les niveaux de bruit obtenu avec le modèle proposé par [19] prenant en compte le bruit d'impact des sillages déterministes, les résultats sont similaires au bruit obtenu en utilisant les sources acoustiques d'un calcul URANS.
4. Dans cette configuration d'approche, le tourbillon impactant au niveau du saumon est le premier contributeur sonore en amont et en aval de la configuration FL05/AL05.
5. Dans le plan de rotation, ni le tourbillon ni le sillage ne dominent le bruit émis. Les deux contribuent de façon équivalente pour la FL05/AL05.
6. L'arc polaire $\Theta \in [50^\circ, 70^\circ]$ est particulièrement mal prédit par la méthodologie présentée.

6.1.2 Bruit à large bande

Le modèle BRWI issu des travaux de Blandeau [13] et Kingan [79] a été utilisé et amélioré par la prise en compte de l'angle de flèche. Le modèle de base a été validé avec la configuration canonique fournie par Blandeau *et al.* [14].

L'effet de la flèche sur la configuration canonique montre que :

1. Les niveaux sonores en aval de la configuration sont particulièrement réduits surtout en hautes fréquences.

2. L'effet de la flèche sur la puissance acoustique est réduit (± 3 dB) mais non négligeable et est visible particulièrement en basses et en hautes fréquences.

En ce qui concerne la FL05/AL05 les conclusions sont :

1. La prise en compte de l'angle de flèche permet d'obtenir une amélioration de la prévision acoustique pour un microphone situé en amont de la configuration sans détérioration notable des résultats à d'autres positions observateurs.
2. La plage de fréquence 100-1 000 Hz. est particulièrement mal prédite par le modèle BRWI qui devient dominant pour des fréquences supérieures à 1 000 Hz.
3. Les résultats actuels sont insuffisants pour conclure sur un effet significatif de la flèche.

6.2 Perspectives

6.2.1 Bruit tonal

1. L'angle de dévers peut être pris en compte dans le calcul des sources acoustiques. De cette manière tous les paramètres géométriques de la pale aval seraient pris en compte dans le calcul du chargement instationnaire.
2. L'influence de la vitesse radiale du tourbillon peut être modélisée pour considérer véritablement un tourbillon complètement 3D.
3. La phase entre les fluctuations de vitesse provenant du sillage et le tourbillon peut être conservée pour ne pas considérer les deux mécanismes comme étant décorrélés. Cet effet pourrait améliorer les prévisions acoustiques pour les directivités polaires comprises entre 50° et 70° .
4. L'influence du tourbillon de bord d'attaque sur le chargement instationnaire peut être étudiée. On obtiendrait alors des résultats en adéquation avec les extractions numériques d'un calcul URANS.
5. La prise en compte du gradient de la vitesse de convection le long du rayon peut aussi être considérée. Les sources acoustiques seraient calculées en résolvant une équation des ondes convectées dans un écoulement stratifié qui moyennant certaines hypothèses pourrait avoir une solution analytique.

6.2.2 Bruit à large bande

1. Le bruit de la couche limite turbulente au bord de fuite des pales (BRTE) devrait être pris en compte. Les résultats acoustiques sur la bande de fréquence 100-1 000 Hz seraient améliorés par rapport au modèle BRWI seul.
2. Il est nécessaire de prendre en compte la turbulence de fond impactant le bord d'attaque des pales aval qui semble dans le cas de la FL05/AL05 non négligeable.
3. Il faudrait tester plus en détail l'influence de l'angle de flèche dans le cas d'une pale en rotation.
4. Les particularités des vitesses turbulentes issues du tourbillon marginal pourraient être étudiées dans le but de potentiellement améliorer la prévision sonore.

ANNEXE A

CFD de référence

A.1 Description de la géométrie

La configuration DHCR étudié (fig. A.1) a 12 pales pour le rotor amont et 10 pales pour le rotor aval. L'ordre de grandeur des calages des pales amont et aval est similaire au DHCR proposé par Danner et Kendall-Torry [29]. La pale aval est effectivement réduite en envergure. Le *clipping* de cette géométrie est de 7,5 % en se basant sur l'envergure du rotor amont. Dans le cas de la configuration de Danner et Kendall-Torry [29], le *clipping* varie de 10 à 20 %. Les géométries sont relativement peu cambrées (de 2% à 4%) et l'épaisseur relative des pales varie de 2% à 10% basée sur la corde.

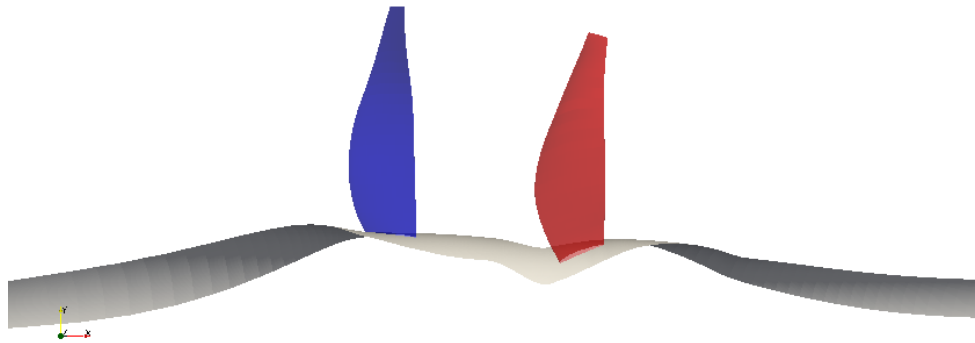


Figure A.1 Vue suivant $+e_z$ de la configuration FL05/AL05.

A.2 Point de fonctionnement

Le fonctionnement du DHCR est en approche et les paramètres sont décrits dans le tableau A.1. Les vitesses de rotation sont basses, le nombre de Mach axial est faible et le couple pression-température correspond aux conditions atmosphériques standard.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
p_0	101325 Pa	T_0	303,15 K
ρ_0	1,1646 kg.m ⁻³	Axe de rotation	e_x
M_X	0,2	c_0	349 m.s ⁻¹
Ω_1	$-2\pi \times 827/60$ rad.s ⁻¹	Ω_2	$+2\pi \times 827/60$ rad.s ⁻¹
B_1	12	B_2	10

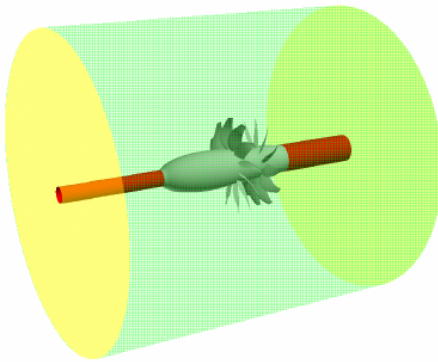
Tableau A.1 Point de fonctionnement à l'étude dans ce manuscrit.

A.3 Paramètres numériques

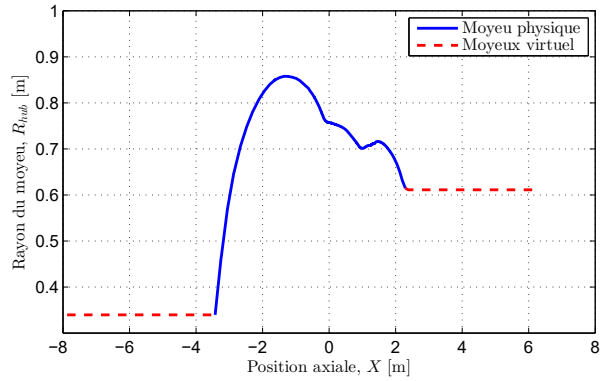
A.3.1 Domaine de calcul

Présentation du domaine

Le domaine de calcul est présenté sur la figure A.2a. Il ne comprend qu'un douzième (1/12) de la configuration complète. À partir du rayon maximal du rotor amont ($R_{1,tip} = 2,13$ m), le plan d'entrée est situé à 7,87 m (3,70 rayon rotor) du bord d'attaque du rotor amont. Le plan de sortie est situé à 4,50 m du bord de fuite du rotor aval. Le maillage est tronqué au moyeu pour éviter les singularités sur l'axe de rotation. Le moyeu est axisymétrique et varie suivant la direction axiale comme indiqué sur la figure A.2b. Le moyeu physique est présent après la position axiale $-3,43$ m et avant $2,29$ m. Le moyeu atteint un maximum un peu avant le rotor amont dont le centre est situé à la position $X = 0$ m. Le rayon maximal du domaine est 6,56 m (3,03 rayon rotor) ce qui permet d'imposer une condition de glissement sans déformer numériquement la veine fluide.



(a) Domaine de calcul



(b) Géométrie du moyeu

Figure A.2 Domaine utilisé par le solveur aérodynamique et variation du moyeu en fonction de la position axiale.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont indiquées dans le tableau A.2. On remarque que puisque des conditions chorochroniques ne sont pas disponibles dans le solveur aérodynamique des conditions de symétries sont utilisées. Le DHCR simulé est donc une configuration 12x12. Le calage du rotor aval a été modifié pour que sa poussée complète soit la même que la configuration 12x10 en utilisant la même méthode que Delattre et Falissard [32].

A.3.2 Maillage

Le maillage est multi-bloc structuré et est composé de 47 blocs. Il comporte 3671840 cellules parallélépipédiques. Ce nombre de mailles s'est avéré suffisant pour le calcul aérodynamique et acoustique présenté par Soulat *et al.* [140]. Différentes vues du maillage sont proposées sur la figure A.3. Le maillage autour des pales est de type O-H (figure

Nom du plan limite	Type de CL	Valeurs associées
Plan d'entrée	Vitesse axiale et taux de turbulence fixés	$U_X = 69,8 \text{ m.s}^{-1}$ et 5 %
Plan de sortie	Pression statique fixe	$p_0 = 101325 \text{ Pa.}$
Plans de symétrie	Conditions de symétries	
Frontières virtuelles	Condition de glissement	$U_X = 69,8 \text{ m.s}^{-1}$

Tableau A.2 Conditions aux limites du calcul.

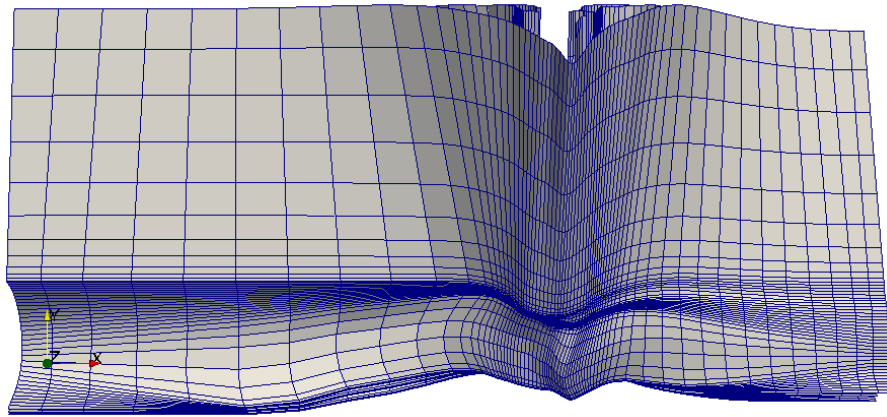
A.3b). La figure A.3c montre que le maillage est raffiné au niveau du tourbillon de tête pour modéliser correctement ce tourbillon. Le $y+$ de la configuration est inférieur à 10 ce qui assure que les couches limites au niveau des pales sont bien résolues sans utiliser de loi de paroi.

A.3.3 Solveur aérodynamique

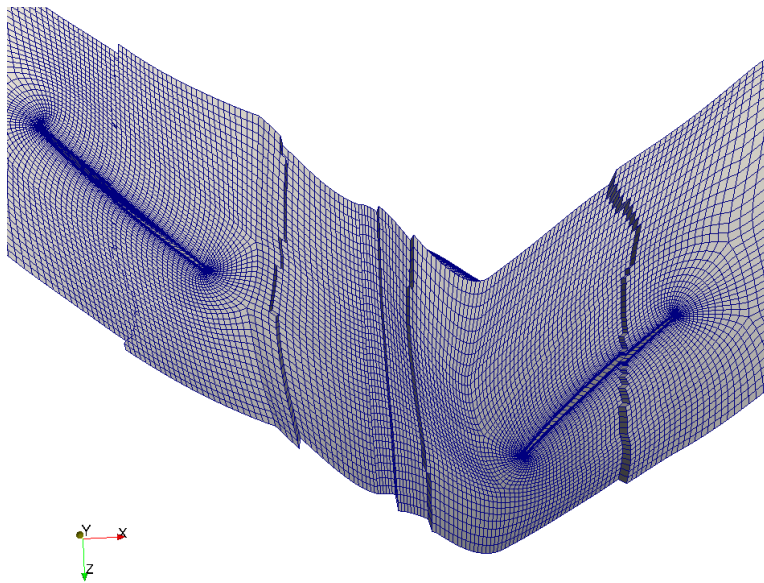
Le solveur aérodynamique est *Turb'flow*. Ce logiciel permet de résoudre des écoulements compressibles visqueux à partir des équations de Navier-Stokes. Pour les calculs instationnaires, les paramètres suivants sont utilisés :

- le schéma temporel est explicite avec une méthode Runge-Kutta à 5 sous-pas (ordre 4 global),
- le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) maximal vaut 0,6 pour un pas de temps physique $\Delta t = 3,17 \cdot 10^{-8} \text{ s}$,
- le schéma spatial décentré de Liou [94] ; les variables conservatives sont traitées au second ordre avec un limiteur de pente SMART [163], le champ turbulent est calculé au premier ordre seulement au saumon des pales afin de limiter les instabilités,
- la dissipation artificielle du schéma spatial (schéma décentré) est corrigée avec un nombre de Mach de coupure ($M_c = 0,5$),
- le fluide est un gaz parfait,
- la viscosité varie avec la température grâce à la loi de Sutherland,
- la turbulence est modélisée par le modèle $k-\omega$ de Kok [84], avec le limiteur de production d'énergie décrit par Menter [102].

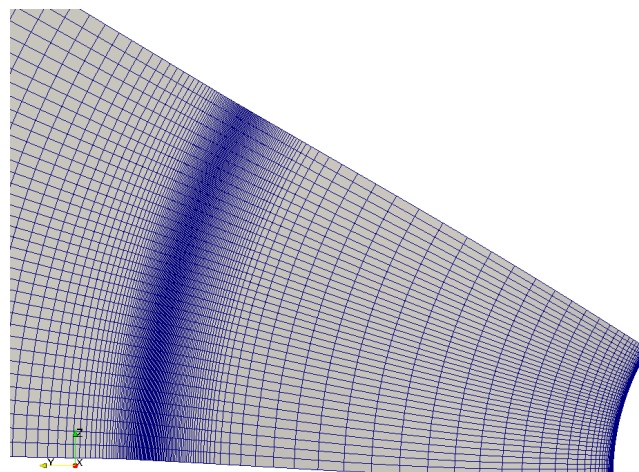
Les équations de conservation sont résolues dans le repère relatif des pales et les forces de Coriolis et centrifuges sont prises en compte au travers de termes sources dans les équations de Navier-Stokes. Les résultats sont initialisés à l'aide d'un calcul stationnaire. Le temps physique de simulation est de 21 passages de pales (ou *Blade Passing Period* (BPP)) sur la base des rotors contrarotatifs (*i.e* $t_{BPP} = 1/(BPF_1 + BPF_2)$). On s'assure ainsi d'avoir des résultats aérodynamiques convergés.



(a) Vue globale du maillage suivant \mathbf{e}_z (1 cellule sur 4 est représentée)



(b) Visualisation des cellules avec un seuillage pour $R = 1,5$ m (mi-envergure)



(c) Coupe axiale du rotor au niveau de l'interface entre $R1$ et $R2$ pour $X \approx 0,7$ m

Figure A.3 Maillage utilisé par le solveur aérodynamique

A.4 Résultats aérodynamiques

A.4.1 Coupes à rayon constant

La figure A.4 présente les coupes au niveau du moyeu ($0,39R_{1,tip}$), à mi-envergure ($0,70R_{1,tip}$) et près du saumon ($0,94R_{1,tip}$). Les résultats sont montrés dans le repère relatif et moyennés dans le temps sur un passage de pale en utilisant 125 itérations. On remarque tout d'abord que le calage des pales est adapté au point de fonctionnement. En effet, l'écoulement est attaché sur toute l'envergure du rotor (pas de vitesse axiale négative dans le passage de pale). Comme attendu l'accélération du fluide est plus importante à l'extrados qu'à l'intrados. On remarque que la coupe proche du saumon coupe le tourbillon marginal du rotor amont.

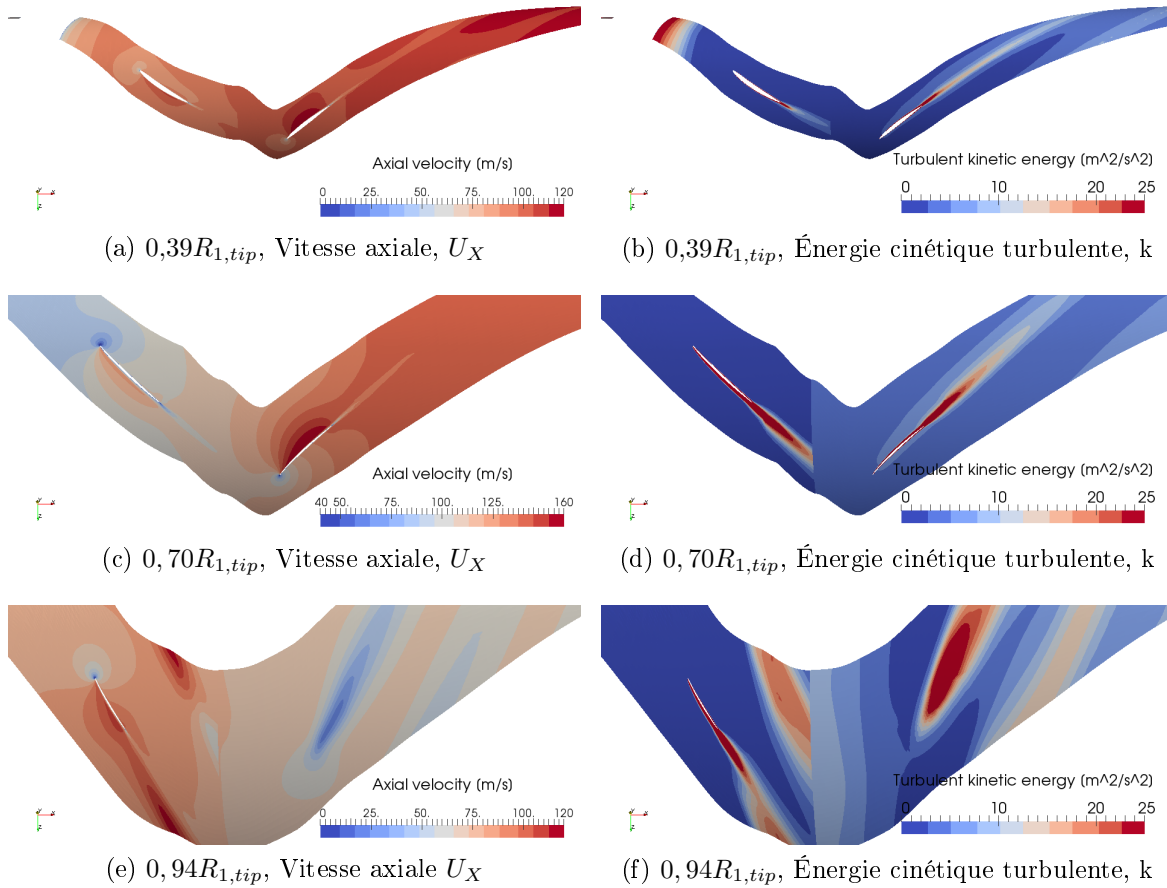


Figure A.4 Coupes à différents rayons (proche moyeu, mi-envergure et proche saumon) affichant la vitesse axiale et l'énergie cinétique turbulente.

La figure A.5 présente les différents coefficients de pression C_p pour les mêmes rayons R que les coupes de la figure A.4. Le C_p est calculé grâce à :

$$C_p = \frac{p - p_0}{0,5\rho_0(U_X^2 + \Omega_\diamond^2 R^2)}, \quad (A.1)$$

avec Ω_ϕ correspondant à la pulsation de rotation du rotor amont 1 ou aval 2. U_X , ρ_0 et p_0 sont obtenus à partir du tableau A.2. On remarque que les pales sont globalement plus chargées en tête qu'en pied. On remarque cependant que le pied de pale du rotor aval est plus chargé que le rotor amont. Cet effet provient de la prérotation de l'écoulement après le rotor amont qui améliore l'écoulement incident vu par le rotor aval, mais aussi du calage différent des pales.

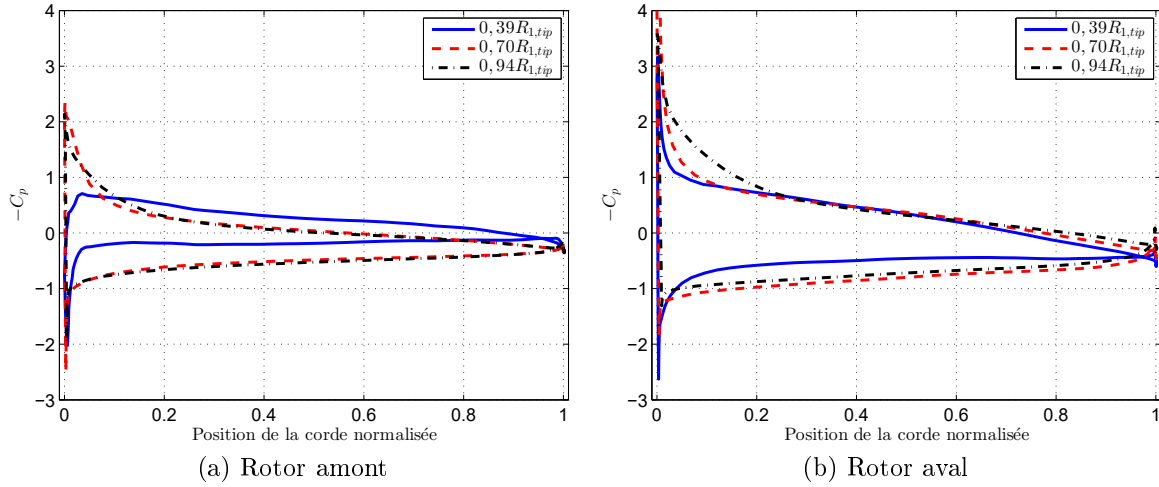


Figure A.5 Coefficients de pression à différents rayons pour les pales des rotors amont et aval. Les coupes sont moyennées pour un passage de pale en utilisant 75 instantanés par passage de pale.

A.4.2 Pression instationnaire à la surface des pales

Le but de cette partie est de faire la connexion avec le calcul du saut de pression numérique harmonique calculé dans la section 3.6.2 pour comparer avec les résultats du modèle analytique. On commencera par regarder la trace temporelle des fluctuations de pression. La figure A.6a présente la trace temporelle de la pression instationnaire $p' = p - p_0 - \bar{p}$ pour les itérations calculées par le solveur pour 3 points différents sur la pale aval avec \bar{p} la pression moyenne liée au chargement stationnaire sur la pale. Ces points sont situés près du moyeu, à mi-envergure et près du saumon. Ils sont indiqués par les cercles de la figure A.6b. On observe alors que la fluctuation de pression est périodique et sa périodicité est liée à la pulsation fondamentale de chargement $B_1(|\Omega_1| + |\Omega_2|)$.

On observe que les fluctuations de pression sont très intenses près du saumon là où le tourbillon marginal interagit avec la pale aval. Pour observer ce mécanisme la figure A.7 présente un iso-contour du critère Q pour un instantané du calcul.

Les coefficients de Fourier de la pression instationnaire \hat{p}_m sont alors obtenus. Pour différents harmoniques de charge, l'amplitude des coefficients $|\hat{p}_m|$ est donnée pour la pale sur la figure A.8. Puisqu'un DHCR 12x12 a été modélisé, les harmoniques de charge du rotor amont sont les mêmes que celles du rotor aval. On peut alors montrer que l'amplitude spectrale du rotor amont est toujours d'un ordre de grandeur inférieur à celle du

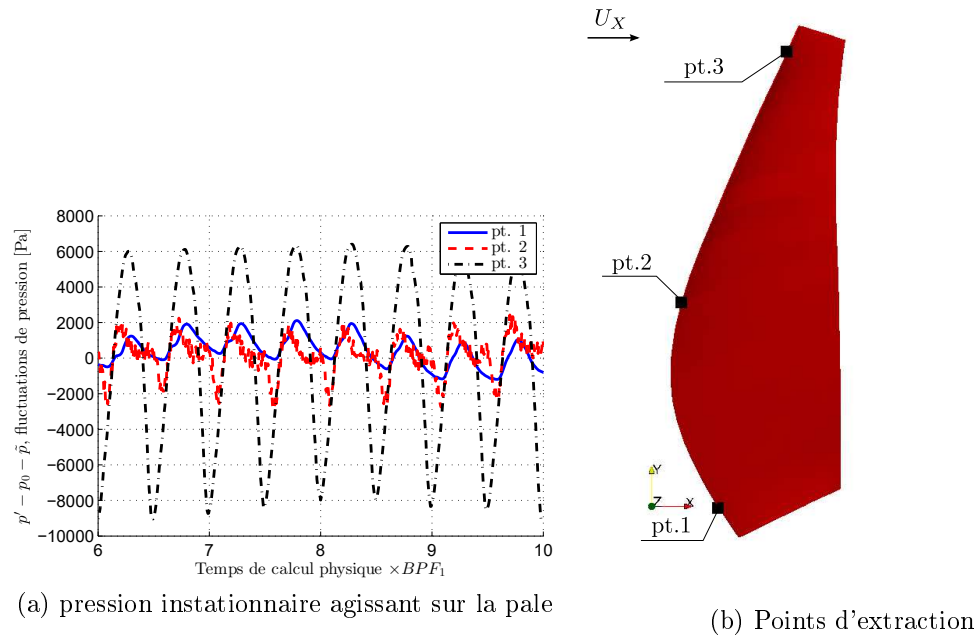


Figure A.6 Extraction temporelle de la pression surfacique sur la pale amont proche du bord d'attaque.

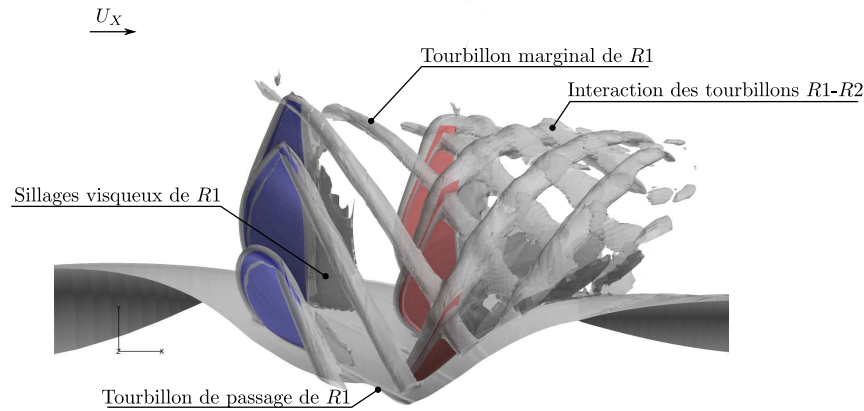


Figure A.7 Critère $Q = 200000 \text{ s}^{-1}$ sur un instantané synchrone (continuité des résultats entre le bloc amont et aval) pour une itération. Les pales amont sont en bleu alors que les pales aval sont en rouge.

rotor aval. Cette remarque justifie l'utilisation seule du rotor aval pour le calcul du bruit tonal d'interaction. La très forte amplitude des harmoniques $m = 1, 2, 3$ au niveau du saumon du rotor aval justifie l'utilisation d'un modèle analytique OBVI si on la combine à la visualisation du critère Q (figure A.7). En pied on remarque aussi la présence d'une fluctuation de pression élevée au bord d'attaque de la pale aval. Cette fluctuation provient d'un tourbillon de pied produit par la pale amont et convecté jusqu'à la pale aval et décrit plus en détail par Soulat *et al.* [140]. Pour finir, pour toutes les harmoniques, sur toute

l'envergure de la pale aval, on observe la trace d'une fluctuation de pression provenant probablement de l'impact des sillages visqueux.

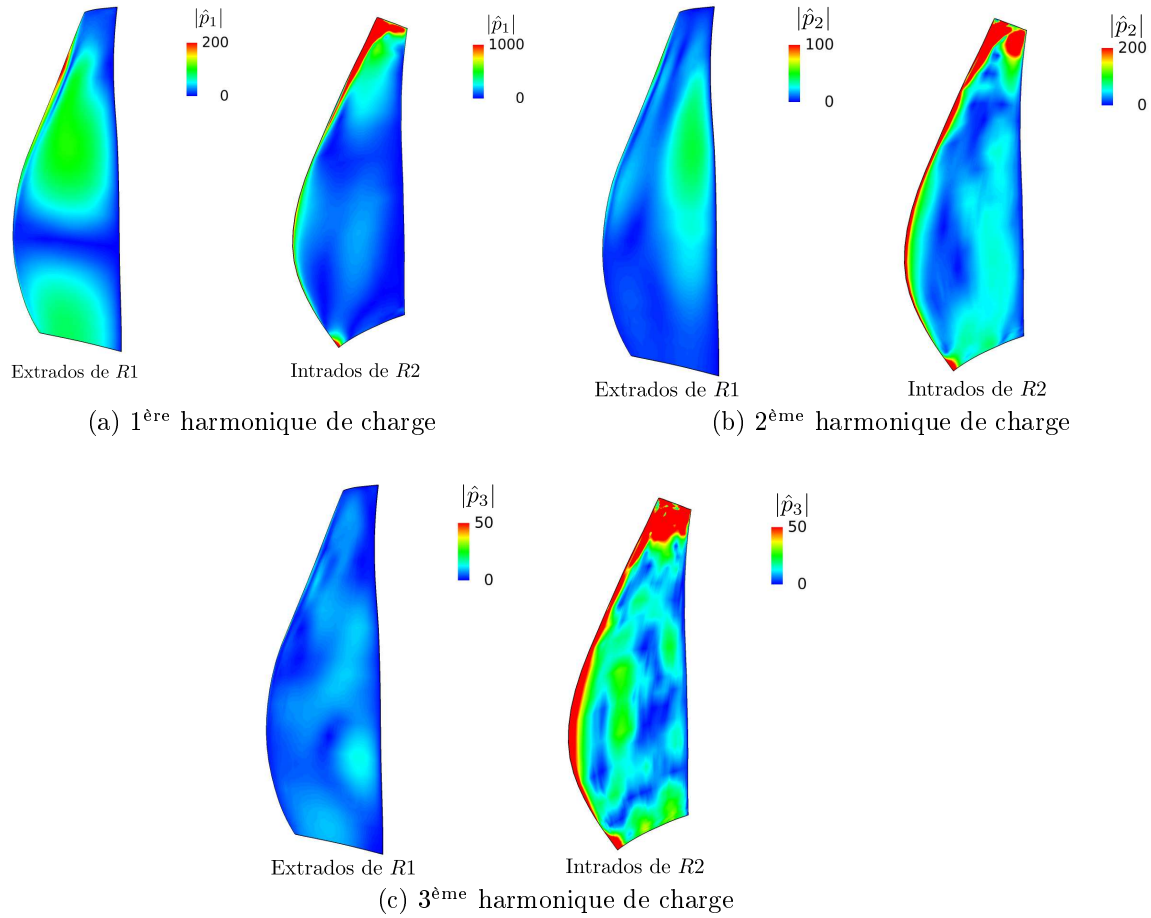


Figure A.8 Extraction des coefficients de Fourier de la pression surfacique sur les pales pour 17 passage de pales contrarotatifs.

ANNEXE B

Formulation du problème du rayonnement acoustique d'un dipôle tournant avec effet de vol

B.1 Méthodologie

Le but de cette annexe est de formuler le bruit produit par les efforts surfaciques d'une surface en rotation autour d'un axe de manière analytique en utilisant la procédure décrite par Hanson et Parzych [67]. Dans ce développement, on considère aussi un écoulement constant suivant l'axe de rotation représentatif du vol d'avancement. Les étapes du calcul sont les suivantes :

1. présenter les repères utilisés,
2. expliquer les modifications de coordonnées induites par l'écoulement axial uniforme,
3. exprimer la solution formelle,
4. valider la solution obtenue avec une méthode numérique (FWH temporel).

B.2 Rappel des repères utilisés

La figure B.1 présente les différents repères utilisés dans le calcul de la propagation acoustique. Un observateur \mathbf{O} reçoit l'onde acoustique émise par une source \mathbf{s} . Les coordonnées sont écrites dans le repère général $R_0 = (O, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$. On a :

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{pmatrix}_{R_{0,car}} = \begin{pmatrix} R \cos \Theta \\ R \sin \Theta \sin \Phi \\ R \sin \Theta \cos \Phi \end{pmatrix}_{R_{0,car}} \quad (\text{B.1})$$

en utilisant l'écriture de \mathbf{O} en repère sphérique. Pour la source, on obtient :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}_{R_{0,car}} = \begin{pmatrix} x_s \\ r_s \sin \phi_s \\ r_s \cos \phi_s \end{pmatrix}_{R_{0,car}} \quad (\text{B.2})$$

en utilisant l'écriture de \mathbf{s} en repère cylindrique.

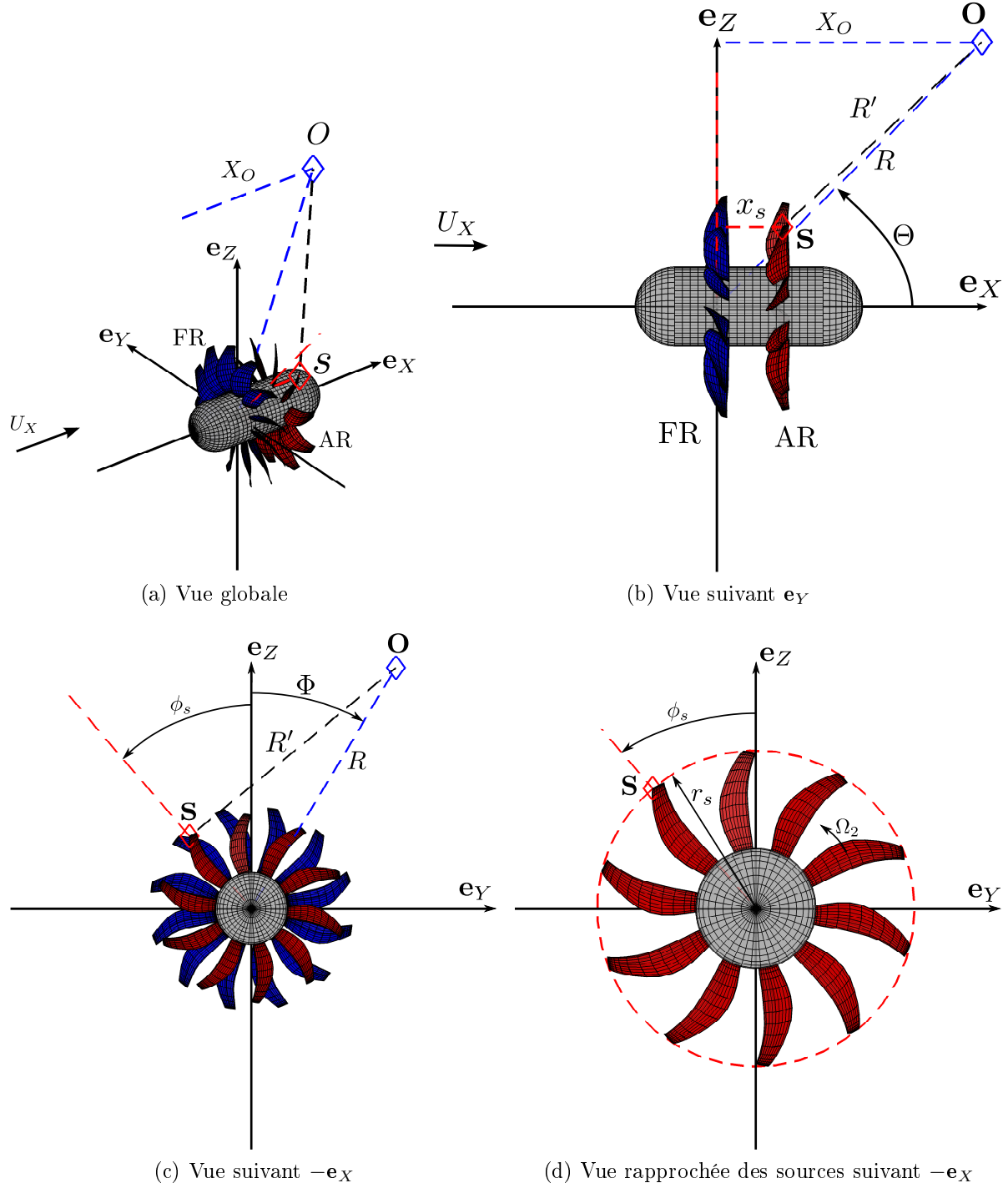


Figure B.1 Repères utilisés pour caractériser un dipôle tournant.

B.3 Solution formelle pour le terme de chargement

Le point de départ de la formulation est l'éq. (1.8) avec $T \rightarrow +\infty$ et dans laquelle n'est gardée que la pression acoustique liée au terme de chargement :

$$p'_L(\mathbf{X}, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_s(\tau)} \frac{\partial}{\partial Y_i} G(\mathbf{X}, t | \mathbf{Y}, \tau) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_s)_i \, dS_s(\tau) d\tau, \quad (\text{B.3})$$

où $\mathbf{e}_s = \nabla f / |\nabla f|$ indique les normales de la surface S_s de la pale pointant de la surface vers le fluide (normales sortantes). La pale est en rotation à la vitesse angulaire Ω_2 . Pour prendre en compte un écoulement axial de vitesse U_X dans la direction \mathbf{e}_X , on peut revenir sur l'émission sonore d'une source sans rotation dans un écoulement axial et observer les modifications sur l'équation (B.3).

B.3.1 Coordonnées d'émission

Si on imagine une source acoustique monopolaire décrite dans la section E.1, on remarque qu'un écoulement permanent change la vitesse de propagation des ondes sonores \mathbf{v}_p :

$$\mathbf{v}_p = c_0 \mathbf{e}_R + U_X \mathbf{e}_X. \quad (\text{B.4})$$

La fonction de Green en champ libre de l'éq. (1.7) va être modifiée par l'écoulement. On porte la modification sur le temps d'émission $\tau \rightarrow \tau_e$ solution de l'équation :

$$g(\tau_e) = (t - \tau_e) - \frac{\sqrt{(X_O - x_s - U_X(t - \tau_e))^2 + (Y_O - y_s)^2 + (Z_O - z_s)^2}}{c_0} = 0, \quad (\text{B.5})$$

dans la fonction de Green en champ libre. Si on prend le carré de l'expression ci-dessus on obtient une équation quadratique :

$$\begin{aligned} c_0^2(1 - M_X^2)(t - \tau_e)^2 + 2U_X(X_O - x_s)(t - \tau_e) - (X_O - x_s)^2 - (Y_O - y_s)^2 - (Z_O - z_s)^2 &= 0 \\ c_0^2(1 - M_X^2)(t - \tau_e)^2 + 2U_X(X_O - x_s)(t - \tau_e) - R'^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La solution est alors :

$$\begin{aligned} \tau_e^\pm &= t + \frac{2U_X(X_O - x_s) \mp \sqrt{4U_X^2(X_O - x_s)^2 + 4c_0^2(1 - M_X^2)R'^2}}{2c_0^2(1 - M_X^2)}, \\ \tau_e^\pm &= t + \frac{M_X(X_O - x_s) \mp \sqrt{(X_O - x_s)^2 + \beta_X^2((Y_O - y_s)^2 + (Z_O - z_s)^2)}}{c_0\beta_X^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$\beta_X = \sqrt{1 - M_X^2}$ est le coefficient de compressibilité lié à l'écoulement axial. Si la vitesse de convection est subsonique $M_X < 1$, la seule solution physique (i.e $\tau_e > 0$) provient de

la solution τ_e^+ . En utilisant l'éq. (B.5) on obtient alors :

$$R'_e = c_0(t - \tau_e^+) = \frac{-M_X(X_O - x_s) + \sqrt{(X_O - x_s)^2 + \beta_X^2((Y_O - y_s)^2 + (Z_O - z_s)^2)}}{\beta_X^2}. \quad (\text{B.8})$$

Cette expression est en accord avec d'autres écritures trouvées dans la littérature [67, 72] avec comme seule différence le nombre de Mach de convection qui est choisi dans une direction opposée à la convention choisie dans ce manuscrit. Ainsi la fonction de Green sera calculée en coordonnées retardées (ou d'émission). La fonction de Green en champ libre de l'éq. (1.7) s'écrit alors :

$$G(\mathbf{O}, t | \mathbf{s}, \tau_e) = \frac{\delta\left(t - \tau_e - \frac{R'_e}{c_0}\right)}{4\pi R'_e \left| \frac{\partial g(\tau_e^+)}{\partial \tau_e} \right|}, \quad (\text{B.9})$$

la dérivée $\partial g(\tau_e^+)/\partial \tau_e$ provenant de la propriété de la distribution de Dirac décrit par l'éq. (1.10). On écrit alors :

$$\left| \frac{\partial g(\tau_e^+)}{\partial \tau_e} \right| = \left| -1 - \frac{M_X(X_O - x_s - M_X R'_e)}{\sqrt{(X_O - x_s - M_X R'_e)^2 + (Y_O - y_s)^2 + (Z_O - z_s)^2}} \right| = |1 + M_X \cos \Theta'_e|. \quad (\text{B.10})$$

où l'angle Θ'_e est l'angle d'émission.

B.3.2 Passage dans le domaine fréquentiel

On utilise alors ces corrections dans l'éq. (B.3) :

$$p'_L(\mathbf{O}, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_s(\tau_e)} \frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\delta\left(t - \tau_e - \frac{R'_e}{c_0}\right)}{4\pi R'_e |1 + M_X \cos \Theta'_e|} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_s)_i \, dS_s(\tau_e) d\tau_e. \quad (\text{B.11})$$

Pour résoudre l'équation précédente, on calcule l'intégrale des sources dans le repère relatif de la pale S_r puisqu'alors la surface des pales ne dépend pas du temps d'émission τ_e . Dans le repère relatif, l'équation précédente s'écrit :

$$p'_L(\mathbf{O}, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\delta\left(t - \tau_e - \frac{R'_e}{c_0}\right)}{4\pi R'_e |1 + M_X \cos \Theta'_e|} P_i \right]_{r_s, \phi_s + \Omega_2 \tau_e, x_s} dS_r d\tau_e. \quad (\text{B.12})$$

$(r_s, \phi_s + \Omega_2 \tau_e, x_s)$ sont en coordonnées cylindriques. Dans l'équation ci-dessus S_r ne dépend plus du temps d'émission puisque cette surface désigne la géométrie de la pale dans le repère relatif. $\mathbf{P}(\tau_e) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_s = (P_1, P_2, P_3)$ est le vecteur des efforts locaux sur la surface. Il ne dépend que du temps d'émission et de la position de la source sur la pale. On inverse donc l'ordre des intégrales et on applique une transformée de Fourier sur le temps de réception

t avec les conventions de la section 2.4.2 :

$$\tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\delta \left(t - \tau_e - \frac{R'_e}{c_0} \right)}{4\pi R'_e |1 + M_X \cos \Theta'_e|} P_i \right] e^{i\omega t} dt dS_r d\tau_e, \quad (\text{B.13})$$

où les limites du temps des sources ont été étendues à l'infini. Les inversions d'intégrales sont immédiates puisqu'il n'y a pas de dépendance des bornes vis-à-vis du temps de réception. Par la propriété de la distribution de Dirac, on obtient :

$$\tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{e^{i\omega \left(\tau_e + \frac{R'_e}{c_0} \right)}}{4\pi R'_e |1 + M_X \cos \Theta'_e|} P_i \right] dS_r d\tau_e. \quad (\text{B.14})$$

La dernière étape est de passer les sources dans le domaine spectral. La variable spectrale de la transformée de Fourier des sources acoustiques est différente de celle des observateurs. Le terme P_i est écrit comme une transformée de Fourier inverse :

$$2\pi P_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_i e^{-i\omega_s \tau_e} d\omega_s. \quad (\text{B.15})$$

La solution dans le domaine spectral s'écrit alors :

$$\tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{e^{i(\omega - \omega_s)\tau_e + i\omega \left(\frac{R'_e(\tau_e)}{c_0} \right)}}{R'_e(\tau_e) |1 + M_X \cos \Theta'_e(\tau_e)|} \right] d\tau_e}_{=I_s} d\omega_s dS_r, \quad (\text{B.16})$$

avec toutes les dépendances relative au temps des sources τ_e explicitées. Si les dépendances au temps τ_e ne sont gardées que dans le terme de phase et que l'on considère une formulation en champ lointain géométrique alors le calcul de l'acoustique peut se faire de manière simplifiée. Le but sera alors de résoudre le terme I_s .

B.3.3 Solution en champ lointain géométrique

En ce qui concerne les termes au dénominateur de I_s on suppose que $|\mathbf{O} - \mathbf{s}| \approx |\mathbf{O}|$. On obtient :

$$R'_e \approx \frac{-M_X X_O + \sqrt{(X_O)^2 + \beta_X^2 (Y_O^2 + Z_O^2)}}{\beta_X^2} = R_e, \quad (\text{B.17})$$

et :

$$\cos \Theta'_e \approx \frac{X_O - M_X R_e}{\sqrt{(X_O - M_X R_e)^2 + Y_O^2 + Z_O^2}} = \frac{X_O - M_X R_e}{R_e} = \cos \Theta_e. \quad (\text{B.18})$$

Pour la phase si on ne souhaite pas considérer une pale compacte d'un point de vue acoustique, une dépendance provenant de la position des sources \mathbf{s} est gardée. Cependant R'_e est une fonction algébrique de degré 1/2. On effectue alors un développement limité du rayon d'émission à l'ordre 1. Le développement limité s'effectue autour du point \mathbf{O} et on note σ_0 le résultat de cette simplification :

$$\sigma_0 = \text{DL}_1 [R'_e] = R_e + \frac{M_X x_s}{\beta_X^2} - \frac{X_0 x_s}{\beta_X^2 S_0} - \frac{Y_0 y_s}{S_0} - \frac{Z_0 z_s}{S_0}. \quad (\text{B.19})$$

avec $S_0 = \sqrt{(X_O)^2 + \beta_X^2(Y_O^2 + Z_O^2)}$. Le terme $X_r = X_O - M_X R_e$ peut s'écrire en fonction S_0 grâce à $X_r = X_O - M_X \sqrt{X_r^2 + Y_O^2 + Z_O^2}$. Cette équation se résout encore une fois avec une équation du second degré. On obtient :

$$X_O - M_X R_e = \frac{X_O - M_X S_0}{\beta_X^2}. \quad (\text{B.20})$$

En utilisant l'éq. (B.17) on a :

$$S_0 = \beta_X^2 R_e + M_X X_O = R_e \left(1 + \frac{M_X X_O - M_X^2 R_e}{R_e} \right) = R_e (1 + M_X \cos \Theta_e). \quad (\text{B.21})$$

En rappelant l'éq. (B.18) on obtient alors :

$$\sigma_0 = R_e - x_s \frac{\cos \Theta_e}{1 + M_X \cos \Theta_e} - \frac{Y_0 y_s}{S_0} - \frac{Z_0 z_s}{S_0}. \quad (\text{B.22})$$

Si l'on injecte les éqs. (B.17), (B.18) et (B.19) dans l'intégrale I_s on obtient :

$$I_s = \frac{\tilde{P}_i}{S_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} e^{i(\omega - \omega_s)\tau_e + ik \left(R_e - x_s \frac{\cos \Theta_e}{D_c} - \frac{Y_0 y_s}{S_0} - \frac{Z_0 z_s}{S_0} \right)} \right] d\tau_e, \quad (\text{B.23})$$

avec $k = \omega/c_0$ le nombre d'onde acoustique et $D_c = (1 + M_X \cos \Theta_e)$ le facteur Doppler pour la phase des sources. Dans le terme de phase, la dépendance en τ_e est portée par les termes y_s et z_s . Puisque les pales ont un mouvement de rotation autour de l'axe \mathbf{e}_X on utilise les coordonnées cylindriques des sources acoustiques et les coordonnées sphérique de l'observateur. Le gradient s'écrit alors :

$$\nabla_{\text{cyl}} = \left(\frac{\partial}{\partial r_s}, \frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial \phi_s}, \frac{\partial}{\partial x_s} \right). \quad (\text{B.24})$$

Pour simplifier, chaque terme est écrit de manière isolée. On calcule alors $I_{s,r}$, $I_{s,\phi}$ et $I_{s,x}$:

$$I_{s,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r_s} e^{i(\omega - \omega_s)\tau_e + ik \underbrace{\left(R_e - x_s \frac{\cos \Theta_e}{D_c} - \frac{r_s \sin \Theta_e}{D_c} \cos(\phi_s + \Omega_2 \tau_e - \Phi) \right)}_{=G(\mathbf{s}, \tau_e)}} \right] d\tau_e, \quad (\text{B.25})$$

qui donne immédiatement :

$$I_{s,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{ik \sin \Theta_e}{D_c} \cos(\phi_s + \Omega_2 \tau_e - \Phi) G(\mathbf{s}, \tau_e) d\tau_e, \quad (\text{B.26})$$

avec $G(\mathbf{s}, \tau_e)$ l'exponentielle complexe écrite sous forme condensée. De la même manière, les autres termes sont écrits directement :

$$I_{s,\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik \sin \Theta_e}{D_c} \sin(\phi_s + \Omega_2 \tau_e - \Phi) G(\mathbf{s}, \tau_e) d\tau_e, \quad (\text{B.27})$$

et :

$$I_{s,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ik \cos \Theta_e}{D_c} G(\mathbf{s}, \tau_e) d\tau_e. \quad (\text{B.28})$$

B.3.4 Fonctions de Bessel

Pour résoudre les intégrales présentées, la formule de Jacobi-Anger est utilisée [164][par. 2.2 p. 22] :

$$e^{ia \cos b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(a) e^{\pm i n b}, \quad (\text{B.29})$$

ainsi que les dérivées de cette formule par rapport à a et à b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{ia \cos b}}{\partial a} &= i \cos(b) e^{ia \cos b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(a) e^{\pm i n b}, \\ \frac{\partial e^{ia \cos b}}{\partial b} &= -ia \sin(b) e^{ia \cos b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pm n i^{n+1} J_n(a) e^{\pm i n b} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

À partir de ces formules on peut calculer les intégrales $I_{s,r}$, $I_{s,\phi}$ et $I_{s,x}$:

$$\begin{aligned} I_{s,r} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-(i)^n k \sin \Theta_e}{D_c} e^{i \xi_n} J'_n \left(\frac{-k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_s \pm n \Omega_2) \tau_e} d\tau_e, \\ I_{s,\phi} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pm n i^{n+1}}{r_s} e^{i \xi_n} J_n \left(\frac{-k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_s \pm n \Omega_2) \tau_e} d\tau_e, \\ I_{s,x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-ik \cos \Theta_e}{D_c} e^{i \xi_n} J_n \left(\frac{-k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_s \pm n \Omega_2) \tau_e} d\tau_e, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

avec $\xi_n = k(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c) \pm n(\phi_s - \Phi)$. L'intégrale de la fonction exponentielle complexe s'écrit comme une distribution de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_s \pm n\Omega_2)\tau_e} d\tau_e = 2\pi\delta(\omega - \omega_s \pm n\Omega_2). \quad (\text{B.32})$$

On obtient au final :

$$\begin{aligned} I_{s,r} &= 2\pi k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^n \sin \Theta_e}{D_c} e^{i\xi_n} J'_n \left(\frac{kr_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \delta(\omega - \omega_s \pm n\Omega_2), \\ I_{s,\phi} &= 2\pi k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pm ni(-i)^n}{kr_s} e^{i\xi_n} J_n \left(\frac{kr_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \delta(\omega - \omega_s \pm n\Omega_2), \\ I_{s,x} &= 2\pi k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^{n+1} \cos \Theta_e}{D_c} e^{i\xi_n} J_n \left(\frac{kr_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \delta(\omega - \omega_s \pm n\Omega_2), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel [164][éq. (2) p. 15] :

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z) \text{ et } J'_n(-z) = (-1)^{n+1} J'_n(z). \quad (\text{B.34})$$

B.3.5 Formulation complète

La formulation complète en champ lointain s'obtient en combinant les solutions données par les éqs. (B.16), (B.23) et (B.33) :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) &= \int_{S_r} \frac{-k e^{ik(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pm in(\phi_s - \Phi) - in\pi/2} \\ &\quad \left\{ \tilde{P}_r(\omega_n) \frac{\sin \Theta_e}{D_c} J'_n \left(\frac{kr_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) + i \left[\pm \tilde{P}_\phi(\omega_n) \frac{n}{kr_s} - \tilde{P}_x(\omega_n) \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_n \left(\frac{kr_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right\} dS_r, \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

avec $\omega_n = \omega \pm n\Omega_2$ la pulsation des sources modulée par la rotation de la pale. $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_r, \tilde{P}_\phi, \tilde{P}_x)$ est la transformée de Fourier du vecteur pression agissant sur la surface. On rappelle que les normales sont sortantes puisque l'on prend les efforts de la pale sur le fluide.

Effet de pales multiples

Si B_2 pales sont considérées, l'éq. (B.23) est modifiée et on écrit :

$$I_s = \sum_{b_2=0}^{B_2-1} I_{s,b_2}. \quad (\text{B.36})$$

$I_{s,i}$ prend en compte plusieurs pales espacées dans la direction \mathbf{e}_ϕ de l'angle $2\pi/B_2$. Cette modification se reporte sur $G(\mathbf{s}, \tau_e)$ qui devient $G_{b_2}(\mathbf{s}, \tau_e)$:

$$G_{b_2}(\mathbf{s}, \tau_e) = e^{i(\omega - \omega_s)\tau_e + ik\left(-x_s \frac{\cos \Theta_e}{D_c} + R_e - r_s \frac{\sin \Theta_e}{D_c} \cos(\phi_s + \Omega_2 \tau_e - \Phi + \frac{2\pi b_2}{B_2})\right)} \quad (\text{B.37})$$

On remarque alors qu'après un développement identique la pression acoustique totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = & - \sum_{b_2=0}^{B_2-1} \int_{S_r} \frac{k e^{ik(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\phi_s - \Phi - \pi/2)} e^{in \frac{b_2 2\pi}{B_2}} \\ & \left\{ \tilde{P}_r(\omega_n) \frac{\sin \Theta_e}{D_c} J'_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) - i \left[\tilde{P}_\phi(\omega_n) \frac{n}{k r_s} - \tilde{P}_x(\omega_n) \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_n \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right\} dS_r, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

ce qui simplifie l'expression puisque lorsque n n'est pas multiple de B_2 le résultat est nul par sommation des racines énième du cercle unité. On a donc :

$$\begin{aligned} - \tilde{p}'_L(\mathbf{O}, \omega) = & \int_{S_r} \frac{B_2 k e^{ik(R_e - x_s \cos \Theta_e / D_c)}}{4\pi S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{iB_2 n(\phi_s - \Phi - \pi/2)} \left\{ \tilde{P}_r(\omega_{B_2 n}) \frac{\sin \Theta_e}{D_c} J'_{nB_2} \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right. \\ & \left. + i \left[\tilde{P}_\phi(\omega_{B_2 n}) \frac{B_2 n}{k r_s} - \tilde{P}_x(\omega_{B_2 n}) \frac{\cos \Theta_e}{D_c} \right] J_{nB_2} \left(\frac{k r_s \sin \Theta_e}{D_c} \right) \right\} dS_r, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

B.3.6 Comparaison avec une méthode FWH temporelle

Pour valider cette formulation, une configuration canonique a été calculée avec deux formulations acoustiques pour valider l'écriture de la solution analytique de l'équation de FWH. La méthode FWH utilisée provient de la formulation décrite par Di Francescantonio [33]. On ne considère que le terme surfacique. Trois configurations canoniques ont été calculées pour observer les différences entre les formulations numériques et analytiques :

- un dipôle axial avec écoulement permanent $U_X = 0, 2 \times c_0$,
- un dipôle tangentiel avec écoulement permanent $U_X = 0, 2 \times c_0$,
- un dipôle radial avec écoulement permanent $U_X = 0, 2 \times c_0$.

Les paramètres du calcul sont les suivants : Les observateurs sont situés sur un arc polaire avec Θ variant de 0 à π . On remarque que ces configurations canoniques permettent dans la formulation analytique d'activer les termes \tilde{P}_r , \tilde{P}_θ et \tilde{P}_x séparément. La méthode FWH temporelle a été calculée sur un temps total de 16,6 rotations du dipôle avec un pas de temps correspondant à $3 \cdot 10^{-3}$ tours par pas de temps. Ces paramètres assurent que la méthode temporelle est complètement convergée et que le signal temporel obtenu a une résolution fréquentielle suffisante. Les résultats sont présentés sur la figure B.2. On

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
p_0	101325 Pa	Φ	0 rad
c_0	340 m.s ⁻¹	Axe de rotation de la source acoustique	\mathbf{e}_x
ρ_0	1,23 kg.m ⁻³	Position du centre de la source acoustique	(0, 0, 1) m
$ p' $	0,1 × p_0 Pa	Surface de la source acoustique	10 ⁻⁴ m ²
Ω_2	(2 π × 100 / 3) rad.s ⁻¹	Temps total pour la méthode temporelle	0,5 s
B_2	1	Pas de temps pour la méthode temporelle	10 ⁻⁴ s
R	16,6 m		

Tableau B.1 Paramètres pour la configuration canonique.

remarque que les deux résultats sont extrêmement proches avec des résultats inférieurs à 1 dB. Ces résultats assurent que la méthode analytique est valide et bien implémentée.

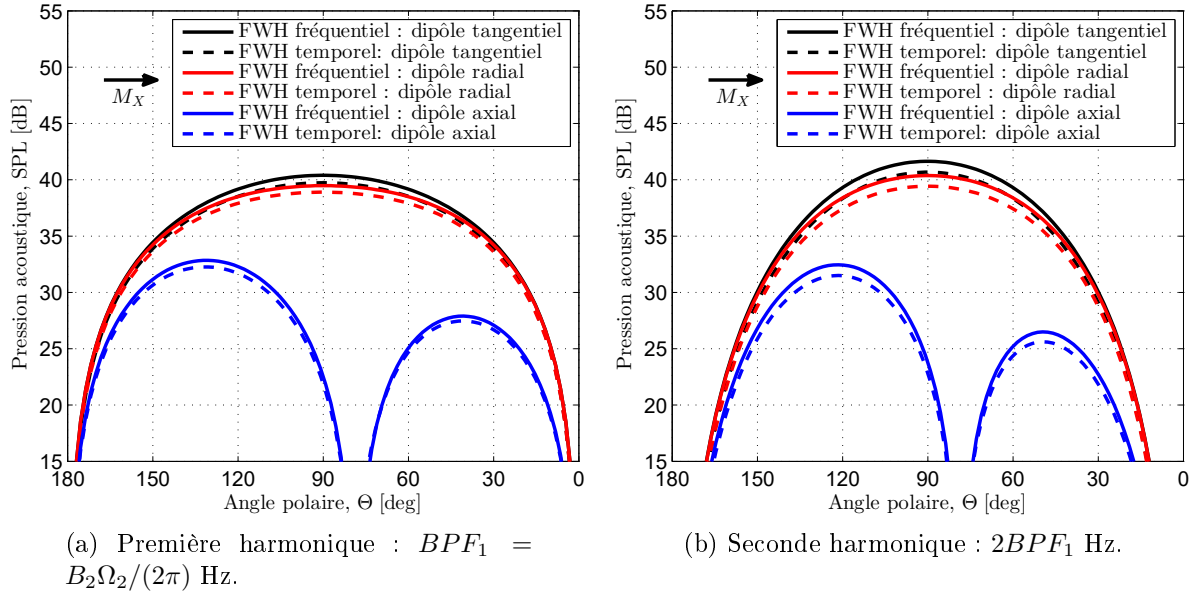


Figure B.2 Résultats de la configuration canonique.

ANNEXE C

Projection des vitesses fluctuantes

C.1 Matrices de rotation utilisées

La figure C.1 présente les différents changements de repères utilisés dans la suite de cette annexe. Ces repères proviennent des descriptions fournies dans la section 1.5.

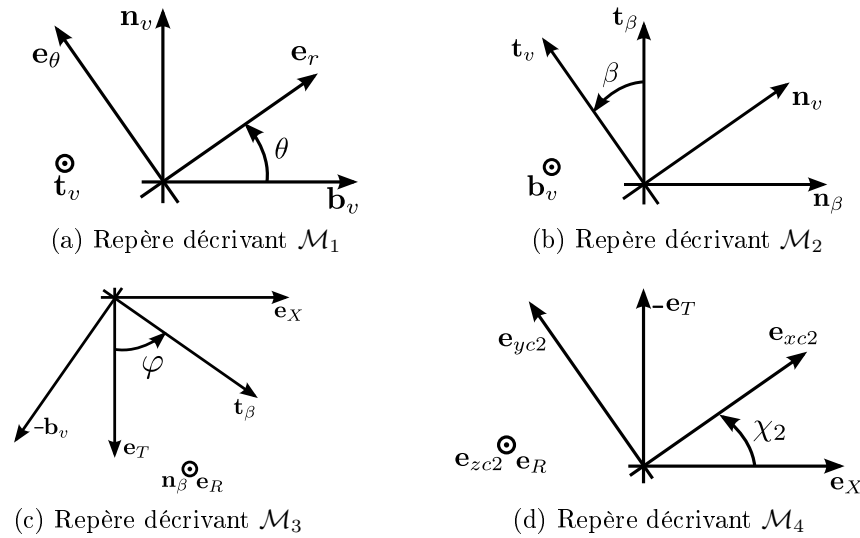


Figure C.1 Matrices de rotations pour l'obtention de l'*upwash* liée au tourbillon

Le but de cette annexe est de détailler les différentes matrices de rotation utilisées pour obtenir les équations (3.4) et (3.6). On a alors les quatre matrices utilisées :

- $\mathcal{M}_1 \leftrightarrow$ Matrice pour passer de $\mathfrak{R}_{v,cyl}$ à $\mathfrak{R}_{v,car}$,
- $\mathcal{M}_2 \leftrightarrow$ Matrice pour passer de $\mathfrak{R}_{v,car}$ à $\mathfrak{R}_{\beta,car}$,
- $\mathcal{M}_3 \leftrightarrow$ Matrice pour passer de $\mathfrak{R}_{\beta,car}$ à \mathfrak{R}_{R1} ,
- $\mathcal{M}_4 \leftrightarrow$ Matrice pour passer de \mathfrak{R}_{R1} à \mathfrak{R}_p .

Tous les repères sont directs et tous les angles sont positifs par définition. On peut alors écrire :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (C.1)$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

et :

$$\mathcal{M}_4 = \begin{pmatrix} -\sin \chi_2 & 0 & -\cos \chi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \chi_2 & 0 & -\sin \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \gamma_2 & 0 & \sin \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma_2 & 0 & -\cos \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

La matrice de passage complète \mathcal{M} est obtenue par application successive des différentes matrices de rotation :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_4 \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1. \quad (\text{C.5})$$

Toutes les composantes de la matrice \mathcal{M} ne sont pas nécessaires puisque seules les composantes liées la direction \mathbf{e}_{yc2} sont utilisées. On remarque aussi que puisque les axes de rotation des différents changements de repères ne sont pas les mêmes la multiplication des différentes matrices n'est pas inversible.

Le terme $\mathcal{M}(1, 2)$ permet d'effectuer le produit scalaire $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{yc2}$ donnant la fluctuation de vitesse w_θ à partir de la vitesse azimutale du tourbillon u_θ :

$$\mathcal{M}(1, 2) = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{yc2} = \sin(\varphi + \chi_2) \sin \theta - \cos(\varphi + \chi_2) \cos \theta \sin \beta. \quad (\text{C.6})$$

On aura donc $w_\theta = \mathcal{M}(1, 2)u_\theta$. Si l'on prend la définition de l'angle de calage à partir du plan comme indiqué sur la figure 1.12 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(1, 2) &= \sin(\varphi + \gamma_2 + \pi/2) \sin \theta - \cos(\varphi + \gamma_2 + \pi/2) \cos \theta \sin \beta \\ &= \cos(\varphi + \gamma_2) \sin \theta - \sin(\varphi + \gamma_2) \cos \theta \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

La valeur de $\mathcal{M}(1, 2)$ est identifiable aux travaux antérieurs proposés par Roger *et al.* [128] si $\beta = 0^\circ$. La valeur $\mathcal{M}(1, 3)$ de la matrice finale est liée quant à elle à la vitesse axiale du tourbillon $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{yc2}$:

$$\mathcal{M}(1, 3) = \cos(\beta) \cos(\varphi + \chi_2) = \cos(\beta) \sin(\varphi + \gamma_2). \quad (\text{C.8})$$

On obtient alors $w_z = \mathcal{M}(1, 3)u_z$. La fluctuation de vitesse totale s'écrit alors $w = w_\theta + w_z$ puisque u_z et u_θ sont orthogonales. On note alors deux propriétés liées à la projection de la vitesse axiale. Premièrement, l'angle de contraction de la veine fluide tend à réduire l'influence de la vitesse axiale. Deuxièmement, si l'interaction est vraiment

purement orthogonale (i.e $\varphi + \gamma_2 = 0^\circ$) alors la vitesse axiale ne contribue pas pour la vitesse normale à la pale. On notera que dans le cas test utilisé par Roger *et al.* [128] ($\varphi + \gamma_2 = 45^\circ$) vitesse azimutale et vitesse axiale sont des contributeurs équivalents pour l'*upwash* subi par la pale. Les termes $\cos \theta$ et $\sin \theta$ doivent être écrits avec les coordonnées associées à la pale aval. Ils seront alors exprimés comme quotients de distances dont le dénominateur est le rayon r dans le repère \mathfrak{R}_v qui doit être écrit avec les coordonnées dans \mathfrak{R}_p .

C.2 Expression du rayon du tourbillon

À partir de la figure C.1b, si l'on considère un vecteur position $\mathbf{x} = (b_1, n_1, t_1)$ dans le repère $\mathfrak{R}_{v,car}$ celui-ci s'écrit alors dans le repère \mathfrak{R}_β grâce à :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_2 = b_1 \\ n_2 = n_1 \cos \beta - t_1 \sin \beta \\ t_2 = n_1 \sin \beta + t_1 \cos \beta \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_{VI}, \mathfrak{R}_\beta} . \quad (\text{C.9})$$

Au centre du tourbillon lorsque le tourbillon impacte la pale, c'est-à-dire pour le triplet de coordonnées (0,0,0) dans n'importe quel référentiel défini dans le tableau 1.1, le rayon dans le plan du tourbillon s'obtient pour $t_1 = 0$. On a :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_2 = b_1 \\ n_2 = n_1 \cos \beta \\ t_2 = n_1 \sin \beta \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_{VI}, \mathfrak{R}_\beta} . \quad (\text{C.10})$$

Le rayon dans le plan de rotation du tourbillon, noté r vaut alors :

$$r = \sqrt{b_1^2 + n_1^2} = \sqrt{(b_2^2 + n_2^2 + t_2^2)} = \sqrt{(1 + \tan^2(\beta))n_2^2 + b_2^2}, \quad (\text{C.11})$$

qui est valide pour n'importe quel angle $\beta \neq k\pi/2$. Le but est d'écrire le rayon en utilisant les coordonnées liées à la pale, c'est-à-dire dans le repère \mathfrak{R}_p . On utilise alors, dans un premier temps, le repère \mathfrak{R}_{R1}

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X = b_2 \cos \varphi - n_2 \sin \varphi \\ R = 0 \\ T = b_2 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_{VI}, \mathfrak{R}_{R1}} . \quad (\text{C.12})$$

or (X, R, T) s'écrit dans le repère \mathfrak{R}_p comme :

$$\begin{cases} X = -y_{c2} \cos \gamma_2 - x_{c2} \sin \gamma_2 \\ R = 0 \\ T = -x_{c2} \cos \gamma_2 + y_{c2} \sin \gamma_2 - \Omega R_{VI} t \end{cases}, \quad (\text{C.13})$$

si l'on suppose que l'interaction pale-tourbillon s'effectue à la pulsation $\Omega = |\Omega_1| + |\Omega_2|$ pour le triplet (x_{c2}, y_{c2}, z_{c2}) dans le repère \mathfrak{R}_p . La pale est située en $y_{c2} = 0$ par conséquent :

$$\begin{cases} b_2 \cos \varphi - n_2 \sin \varphi = -x_{c2} \sin \gamma_2 \\ b_2 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi = -x_{c2} \cos \gamma_2 - \Omega R_{VI} t \end{cases} \quad (C.14)$$

En utilisant la première ligne de l'éq. (C.14) on obtient :

$$n_2 = \frac{b_2 \cos \varphi - x_{c2} \sin \gamma_2}{\sin \varphi}, \quad (C.15)$$

qui insérée dans la deuxième ligne de l'éq. (C.14) permet de calculer :

$$b_2 = \sin(\gamma_2 + \varphi) \left(x_{c2} - \frac{\Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) t}{\sin(\gamma_2 + \varphi)} \right). \quad (C.16)$$

Le rayon dans le plan du tourbillon s'écrit alors en utilisant b_2 et n_2 précédemment obtenus :

$$r = \sqrt{(1 + \tan^2(\beta)) z_{c2}^2 + \sin(\gamma_2 + \varphi)^2 \left(x_{c2} - \frac{\Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) t}{\sin(\gamma_2 + \varphi)} \right)^2}. \quad (C.17)$$

Si l'on considère $c_\beta = \sqrt{1 + \tan^2(\beta)}$ l'expression de r indiquée dans l'éq. (3.3) s'ensuit :

$$r = \sqrt{(c_\beta z_{c2})^2 + \sin(\gamma_2 + \varphi)^2 \left(x_{c2} - \frac{\Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) t}{\sin(\gamma_2 + \varphi)} \right)^2}. \quad (C.18)$$

À partir de ce rayon, les calculs pour les différents modèles de tourbillons peuvent être envisagés.

C.3 Fluctuation de vitesse générée par la vitesse azimutale du tourbillon

À partir des référentiels et du rayon, les trois tourbillons utilisés sont explicités. Les vitesses des tourbillons de Lamb-Oseen, Scully et Taylor sont respectivement :

$$\frac{u_\theta^{LO}}{u_\theta^{max}} = \frac{(1 - e^{-\alpha(r/r_0)^2})}{r/r_0 (1 - e^{-\alpha^2})}, \quad (C.19)$$

$$\frac{u_\theta^{Sc}}{u_\theta^{max}} = \frac{\sqrt{2}r/r_0}{((r/r_0)^2 + 1)}, \quad (C.20)$$

et :

$$\frac{u_{\theta}^{Ta}}{u_{\theta}^{max}} = \frac{r}{r_0} e^{\frac{1-(r/r_0)^2}{2}}. \quad (C.21)$$

À partir de ces équations, les vitesses dans la direction \mathbf{e}_{yc2} , ou *upwash*, sont calculées :

$$\begin{aligned} w^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, t) &= u_{\theta}^{LO} \mathbf{e}_{\theta} \cdot \mathbf{e}_{yc2} \\ &= \frac{u_{max} r_0}{(1 - e^{-\alpha^2})} \frac{\left(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)}\right)}{r} [\sin(\theta) \cos(\varphi + \gamma_2) + \cos(\theta) \sin(\beta) \cos(\varphi + \gamma_2)] \\ &= \frac{u_{\theta}^{max} r_0}{(1 - e^{-\alpha^2})} \frac{\left(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)}\right)}{r^2} \\ &\quad \times [-(\cos(\beta) + \tan(\beta)) z_{c2} \cos(\varphi + \gamma_2) + \sin^2(\varphi + \gamma_2) (x_{c2} - U_c t) \sin(\beta)] . \end{aligned} \quad (C.22)$$

On introduit les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} C_{amp} &= \frac{u_{\theta}^{max} r_0}{(1 - e^{-\alpha^2})}, \\ C_{chord} &= \sin(\beta) \sin^2(\varphi + \gamma_2), \\ C_{span} &= (\cos(\beta) + \tan(\beta)) \cos(\varphi + \gamma_2). \end{aligned} \quad (C.23)$$

De cette manière, l'expression de l'*upwash* s'écrit plus simplement :

$$w^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, t) = C_{amp} \frac{\left(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)}\right)}{r^2} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] . \quad (C.24)$$

De même les *upwash* pour les tourbillons de Scully et de Taylor sont obtenus :

$$w^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, t) = \frac{u_{\theta}^{max} \sqrt{2}}{r_0} \frac{1}{((r/r_0)^2 + 1)} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] , \quad (C.25)$$

$$w^{CW}(x_{c2}, z_{c2}, t) = \frac{u_{\theta}^{max}}{r_0} e^{1-r/r_0} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord} (x_{c2} - U_c t)] . \quad (C.26)$$

C.3.1 Modèle de Lamb-Oseen

À partir des conventions de Fourier définies dans la Section 2.4.2, on obtient :

$$\tilde{w}^{\diamond}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{\diamond}(x_{c2}, z_{c2}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (C.27)$$

où \diamond indique n'importe quel modèle de tourbillon. Pour le modèle de Lamb-Os en on obtient :

$$\tilde{w}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)})}{r^2} [-C_{span} z_{c2} + C_{chord}(x_{c2} - U_c t)] e^{i\omega t} dt. \quad (C.28)$$

L'int egrale peut être r esolue s epar ement en deux parties :

$$\tilde{w}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = w_{span}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) + w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega), \quad (C.29)$$

avec les diff erents termes valant respectivement :

$$w_{span}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = -\frac{C_{amp} C_{span} z_{c2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)})}{r^2} e^{i\omega t} dt, \quad (C.30)$$

et :

$$w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)})}{r^2} [x_{c2} - U_c t] e^{i\omega t} dt. \quad (C.31)$$

La premi ere int egrale est d ej a calcul ee par Roger *et al.* [128] :

$$w_{span}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{-z_{c2} C_{amp} C_{span}}{4} \frac{e^{ik_x x_{c2}}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2) c_\beta z_{c2}} [h(-z_{c2}) - h(z_{c2})], \quad (C.32)$$

en d efinisant :

$$k_x = \frac{\omega}{U_c} \\ h(|z_{c2}|) = e^{i \frac{k_x |c_\beta z_{c2}|}{\sin(\varphi + \gamma_2)}} \left(1 - \Phi^0 \left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} + \frac{k_x r_0}{2 \sin(\varphi + \gamma_2) \sqrt{\alpha}} \right) \right), \quad (C.33)$$

avec $\Phi^0(x)$ la fonction erreur d efinie par Abramowitz et Stegun [1]. La deuxi eme partie du d evloppement sera compl etement calcul ee :

$$w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha(r^2/r_0^2)})}{r^2} [x_{c2} - U_c t] e^{i\omega t} dt. \quad (C.34)$$

Avec le changement de variable $\epsilon = \sin(\varphi + \gamma_2)(x_{c2} - U_c t)$, on obtient :

$$w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord}}{2\pi U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}\right)}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} \frac{\epsilon}{\sin(\varphi + \gamma_2)} e^{\frac{i\omega}{U_c}(x_{c2} - \epsilon/\sin(\varphi + \gamma_2))} d\epsilon. \quad (C.35)$$

Le développement se sépare une fois de plus en deux parties différentes :

$$w_{chord}^{LO-1}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord} e^{ik_x x_{c2}}}{2\pi U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon, \quad (C.36)$$

$$w_{chord}^{LO-2}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord} e^{ik_x x_{c2}}}{2\pi U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon.$$

En utilisant $\kappa_x = \omega/(U_c \sin(\varphi + \gamma_2))$ et [1][chapitre 17.23, table 15⁷], on obtient alors :

$$w_{chord}^{LO-1}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{i C_{amp} C_{chord} e^{ik_x x_{c2}}}{2\pi U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \text{sign}(-\kappa_x) \pi e^{-|c_\beta z_{c2} \kappa_x|}, \quad (C.37)$$

et si $\omega > 0$ alors :

$$w_{chord}^{LO-1}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{-C_{amp} C_{chord} e^{ik_x x_{c2}}}{2\pi U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} i \pi e^{-c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \quad (C.38)$$

et :

$$w_{chord}^{LO-2}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon. \quad (C.39)$$

En utilisant $A = C_{amp} C_{chord} e^{ik_x x_{c2}}/(2\pi U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2))$, w_{chord}^{LO-2} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} w_{chord}^{LO-2}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= A \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon + A \int_{-\infty}^0 \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon \\ &= A \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon - A \int_0^{+\infty} -\epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{+i\kappa_x \epsilon} d\epsilon \\ &= A \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{-i\kappa_x \epsilon} d\epsilon - A \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} e^{+i\kappa_x \epsilon} d\epsilon \\ &= A \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha(c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2)/r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} [e^{-i\kappa_x \epsilon} - e^{+i\kappa_x \epsilon}] d\epsilon \end{aligned}$$

$$= -2iAe^{-\alpha \frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{r_0^2}} \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{e^{-\alpha \epsilon^2 / r_0^2}}{c_\beta^2 z_{c2}^2 + \epsilon^2} [\sin(\kappa_x \epsilon)] d\epsilon. \quad (C.40)$$

À partir du résultat précédent et de l'éq. (3.954, 1¹¹) ETI I 74(26) donné par Gradshteyn et Ryzhik [61] :

$$\begin{aligned} w_{chord}^{LO-2}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= \frac{2iA\pi}{4} \left[2 \sinh(\kappa_x c_\beta |z_{c2}|) + e^{-c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} - \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} + \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (C.41)$$

Finalement, on assemble les expressions de $w_{chord}^{LO-1}(x_{c2}, z_{c2}, \omega)$ et $w_{chord}^{LO-2}(x_{c2}, z_{c2}, \omega)$ pour obtenir la solution pour le tourbillon de Lamb-Oseen :

$$\begin{aligned} w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= i\pi A \left[-e^{-c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} - \frac{1}{2} e^{\kappa_x c_\beta |z_{c2}|} + \frac{1}{2} e^{-\kappa_x c_\beta |z_{c2}|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e^{-c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} - \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{1}{2} e^{c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} + \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (C.42)$$

Puisque Φ^0 est une fonction impaire :

$$\begin{aligned} w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= i\pi A \left[-\frac{1}{2} e^{\kappa_x c_\beta |z_{c2}|} - \frac{1}{2} e^{-\kappa_x c_\beta |z_{c2}|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(-\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} + \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{1}{2} e^{c_\beta |z_{c2}| \kappa_x} \Phi^0\left(\frac{\sqrt{\alpha} c_\beta |z_{c2}|}{r_0} + \frac{\kappa_x r_0}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right], \end{aligned} \quad (C.43)$$

qui se résume à :

$$w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = -i\frac{\pi}{2} A [h(-|z_{c2}|) + h(|z_{c2}|)]. \quad (C.44)$$

En utilisant l'expression de $h(x)$ dans l'éq. (C.33) on obtient :

$$\begin{aligned} w^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= w_{span}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) + w_{chord}^{LO}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) \\ &= \frac{-C_{amp}}{4U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} e^{ik_x x_{c2}} \left[C_{span} \frac{h(-|z_{c2}|) - h(|z_{c2}|)}{c_\beta} + iC_{chord} \frac{h(-|z_{c2}|) + h(|z_{c2}|)}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right]. \end{aligned} \quad (C.45)$$

À partir de cette expression le spectre bidimensionnel \tilde{G} est calculé à partir de l'équation (3.12) :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{LO}(k_x, k_z) &= \frac{-C_{amp}}{8\pi U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{ik_x x_{c2}} \left[C_{span} \frac{h(-|z_{c2}|) - h(|z_{c2}|)}{c_\beta} - iC_{chord} \frac{h(-|z_{c2}|) + h(|z_{c2}|)}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right] e^{-ik_x x_{c2}} \right] e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}. \end{aligned} \quad (C.46)$$

Le résultat se simplifie en :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{LO}(k_x, k_z) &= \frac{-C_{amp}}{8\pi U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_{span} \frac{h(-|z_{c2}|) - h(|z_{c2}|)}{c_\beta} + iC_{chord} \frac{h(-|z_{c2}|) + h(|z_{c2}|)}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right] e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}. \end{aligned} \quad (C.47)$$

L'équation ci-dessus peut être séparée en deux :

$$\begin{aligned} H_1(k_x, k_z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(|z_{c2}|) e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}, \\ H_2(k_x, k_z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(-|z_{c2}|) e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}, \end{aligned} \quad (C.48)$$

ce qui donne en utilisant la relation donnée [1][éq. (6.311) p 648] :

$$\begin{aligned} H_1(k_x, k_z) &= \frac{1}{\pi (2abk_x - ik_z)} \exp(-a^2 k_x^2 - k_z^2 / (4b^2)), \\ H_2(k_x, k_z) &= \frac{1}{\pi (2abk_x + ik_z)} \exp(-a^2 k_x^2 - k_z^2 / (4b^2)). \end{aligned} \quad (C.49)$$

On peut alors encore une fois séparer l'équation en deux parties :

$$\begin{aligned} G_1^{LO}(k_x, k_z) &= \frac{-C_{amp} C_{span}}{2\pi 4U_c \sin(\varphi + \gamma_2) c_\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} [h(-|z_{c2}|) - h(|z_{c2}|)] e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}, \\ G_2^{LO}(k_x, k_z) &= \frac{-C_{amp} C_{chord} i}{2\pi 4U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [h(-|z_{c2}|) + h(|z_{c2}|)] e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}, \end{aligned} \quad (C.50)$$

qui grâce à l'éq. (C.49) donne :

$$G_1^{LO}(k_x, k_z) = C_1^{LO} \left[\frac{2}{2abk_x + ik_z} - \frac{2}{2abk_x - ik_z} \right] e^{-a^2 k_x^2 - k_z^2 / (4b^2)}, \quad (C.51)$$

en utilisant les définitions :

$$\begin{cases} a = \frac{r_0}{2\sqrt{\alpha}\sin(\varphi + \gamma_2)}, \\ b = \frac{\sqrt{\alpha}c_\beta}{r_0}, \\ C_1^{LO} = -\frac{C_{amp}C_{span}}{(2\pi 4U_c\sin(\varphi + \gamma_2)c_\beta)}. \end{cases} \quad (C.52)$$

De la même manière on peut obtenir :

$$G_2^{LO}(k_x, k_z) = C_2^{LO} \left[\frac{2}{2abk_x + ik_z} + \frac{2}{2abk_x - ik_z} \right] e^{-a^2k_x^2 - k_z^2/(4b^2)} \quad (C.53)$$

avec $C_2^{LO} = -iC_{amp}C_{chord}/(2\pi 4U_c\sin^2(\varphi + \gamma_2))$. Finalement, la décomposition spectrale en rafales élémentaires bidimensionnelles de l'*upwash* d'un tourbillon de Lamb-Oseen s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{LO}(k_x, k_z) = \\ \frac{iC_{amp}}{2\pi U_c\sin(\varphi + \gamma_2)} \frac{\exp\left(-a^2k_x^2 - \frac{k_z^2}{4b^2}\right)}{(2abk_x)^2 + k_z^2} \left[\frac{C_{span}k_z}{c_\beta} - \frac{C_{chord}2abk_x}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right]. \end{aligned} \quad (C.54)$$

C.3.2 Modèle de Scully

La vitesse azimutale décrite par un modèle de Scully permet d'écrire :

$$\begin{aligned} w^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, t) &= u_\theta^{Sc} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{yc2} \\ &= \frac{u_\theta^{max}\sqrt{2}}{r_0} \frac{r}{((r/r_0)^2 + 1)} [\sin(\theta)\cos(\varphi + \gamma_2) + \cos(\theta)\sin(\beta)\cos(\varphi - \gamma_2)] \\ &= \frac{u_\theta^{max}\sqrt{2}}{r_0} \frac{[-(\cos(\beta) + \tan(\beta))z_{c2}\cos(\varphi + \gamma_2) + \sin^2(\varphi + \gamma_2)(x_{c2} - U_ct)\sin(\beta)]}{((r/r_0)^2 + 1)}, \end{aligned} \quad (C.55)$$

ce qui se simplifie de la même manière que pour le tourbillon de Lamb-Oseen :

$$\begin{aligned} C_{amp} &= \frac{u_\theta^{max}\sqrt{2}}{r_0}, \\ C_{chord} &= \sin(\beta)\sin^2(\varphi + \gamma_2), \\ C_{span} &= (\cos(\beta) + \tan(\beta))\cos(\varphi + \gamma_2). \end{aligned}$$

En utilisant la transformation de Fourier définie par l'éq. (C.27) il vient :

$$\tilde{w}_{span}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = -\frac{C_{amp}C_{span}z_{c2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((r/r_0)^2 + 1)} e^{i\omega t} dt,$$

$$\tilde{w}_{chord}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp}C_{chord}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((r/r_0)^2 + 1)} [x_{c2} - U_c t] e^{i\omega t} dt. \quad (C.56)$$

De la même manière que pour le tourbillon de Lamb-Oseen, on coupe en deux les intégrales :

$$\begin{aligned} I_1^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((r/r_0)^2 + 1)} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{r_0^2 e^{ik_x x_{c2}}}{2U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \frac{e^{-\frac{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)}}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}, \end{aligned} \quad (C.57)$$

et :

$$\begin{aligned} I_2^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{((r/r_0)^{2n} + 1)^{1/n}} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{x_{c2}}{U_c} I_{Sc}^1(x_{c2}, z_{c2}, \omega) + \frac{r_0^2 e^{ik_x x_{c2}}}{2U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)} e^{-\frac{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)}}. \end{aligned} \quad (C.58)$$

L'expression de l'*upwash* complète s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= C_{amp} [-C_{span} z_{c2} I_1^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) + C_{chord} x_{c2} I_2^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) \\ &\quad - U_c C_{chord} I_{Sc}^2(x_{c2}, z_{c2}, \omega)], \end{aligned} \quad (C.59)$$

ou bien de manière plus compacte :

$$\tilde{w}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = C_{amp} [-C_{span} z_{c2} I_2^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) + i C_{chord} I_{2*}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega)], \quad (C.60)$$

avec :

$$I_{2*}^{Sc}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{r_0^2 e^{ik_x x_{c2}}}{2U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} e^{-\frac{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2} \omega}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)}}. \quad (C.61)$$

On effectue une transformée de Fourier dans la direction de l'envergure :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{Sc}(k_x, k_z) &= -\frac{C_{amp} r_0^2}{2\pi 2U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{C_{span} z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} + i \frac{C_{chord}}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \right] \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} - i k_z z_{c2} \right) dz_{c2}, \end{aligned} \quad (C.62)$$

que l'on peut encore une fois séparer en deux :

$$\begin{aligned}
G_{Sc}^1(k_x, k_z) &= C_{span} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \right) dz_{c2}, \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \right) dz_{c2} \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} - ik_z z_{c2} \right) dz_{c2}, \\
&= C_{span} \left[\int_0^{+\infty} \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} - ik_z z_{c2} \right) dz_{c2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{+\infty} \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} + ik_z z_{c2} \right) dz_{c2} \right],
\end{aligned}$$

et qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}
G^{Sc-1}(k_x, k_z) \\
&= -2iC_{span} \int_0^{+\infty} \frac{z_{c2}}{\sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} - ik_z z_{c2} \right) \sin(k_z z_{c2}) dz_{c2}. \quad (C.63)
\end{aligned}$$

La solution de cette équation utilise le résultat donné par Gradshteyn et Ryzhik [61] (3.961 1.) ETI 75(36)) :

$$G^{Sc-1}(k_x, k_z) = \frac{-2ik_z r_0 C_{span}}{c_\beta^2 \sqrt{k_z^2 + \frac{c_\beta^2 k_x^2}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)}}} K_1 \left(\frac{r_0}{c_\beta} \sqrt{k_z^2 + \frac{c_\beta^2 k_x^2}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)}} \right), \quad (C.64)$$

avec K_1 la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre 1. On résout maintenant la deuxième partie de l'équation (C.62) :

$$G^{Sc-2}(k_x, k_z) = \frac{iC_{chord}}{\sin(\varphi + \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\omega \sqrt{r_0^2 + c_\beta^2 z_{c2}^2}}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \right) dz_{c2}. \quad (C.65)$$

On utilise alors une intégration par parties pour obtenir :

$$G^{Sc-2}(k_x, k_z) = \frac{2iC_{chord}k_x}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)} \frac{r_0}{c_\beta \sqrt{k_z^2 + c_\beta^2 k_x^2 / \sin^2(\varphi + \gamma_2)}} K_1 \left(\frac{r_0}{c_\beta} \sqrt{k_z^2 + \frac{c_\beta^2 k_x^2}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)}} \right). \quad (C.66)$$

On assemble alors les deux parties de la solution :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{Sc}(k_x, k_z) &= G^{Sc-1}(k_x, k_z) + G^{Sc-2}(k_x, k_z) = -\frac{C_{amp}r_0^2}{4\pi U_c \sin(\gamma_2 + \phi)} \\ &\left[-k_z C_{span} + \frac{k_x C_{chord}}{c_\beta \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right] \frac{2ir_0}{\sqrt{k_z^2 + c_\beta^2 k_x^2 / \sin^2(\varphi + \gamma_2)}} K_1 \left(\frac{r_0}{c_\beta} \sqrt{k_z^2 + \frac{c_\beta^2 k_x^2}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)}} \right). \end{aligned} \quad (C.67)$$

C.3.3 Modèle de Taylor

En utilisant la vitesse azimutale d'un tourbillon de Taylor, l'*upwash* s'écrit :

$$\begin{aligned} w^{Ta}(x_{c2}, z_{c2}, t) &= u_\theta^{Ta} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{yc2} \\ &= \frac{u_\theta^{max} e^{1/2}}{r_0} r e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} [\sin(\theta) \cos(\varphi + \gamma_2) + \cos(\theta) \sin(\beta) \sin(\varphi + \gamma_2)] \\ &= \frac{u_\theta^{max} e^{1/2}}{r_0} e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} [-(\tan(\beta) + \cos(\beta)) z_{c2} \cos(\varphi + \gamma_2) + \sin^2(\varphi + \gamma_2) (x_{c2} - U_c t) \sin(\beta)], \end{aligned} \quad (C.68)$$

et en utilisant la transformation de Fourier temporelle de l'éq. (C.27), on écrit :

$$w_{span}^{Ta}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = -\frac{C_{amp} C_{span} z_{c2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} e^{i\omega t} dt, \quad (C.69)$$

ce qui grâce au terme $C_{amp} = u_\theta^{max} e^{1/2} / r_0$ se simplifie :

$$w_{chord}^{Ta}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_{amp} C_{chord}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} [x_{c2} - U_c t] e^{i\omega t} dt. \quad (C.70)$$

Grâce aux tableaux (17.23) et (17.33) décrits par Abramowitz et Stegun [1], les intégrales sont une fois de plus séparées et calculées analytiquement. On obtient respectivement :

$$\begin{aligned} I_1^{Ta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{r_0}{\sqrt{2\pi} U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} e^{-\left(\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + \frac{8r_0^2 \omega^2}{U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right) + i k_x x_{c2}}, \end{aligned} \quad (C.71)$$

et :

$$\begin{aligned} I_2^{Ta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(r/r_0)^2}{2}} [x_{c2} - U_c t] e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} U_c^2 \sin^3(\varphi + \gamma_2)} r_0^3 \omega e^{-\left(\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + \frac{8r_0^2 \omega^2}{U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right) + i k_x x_{c2}}. \end{aligned} \quad (C.72)$$

Ces résultats permettent d'obtenir directement :

$$\begin{aligned} w^{Ta}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) &= C_{amp} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + \frac{8r_0^2 \omega^2}{U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right) + i k_x x_{c2}} \\ &\times \frac{r_0}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \left[-\pi C_{span} z_{c2} - i \frac{C_{chord} r_0^2 \omega}{U_c \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right]. \end{aligned} \quad (C.73)$$

On applique alors la transformation de Fourier dans la direction de l'envergure :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{Ta}(k_x, k_z) &= \frac{C_{Amp} \sqrt{2\pi} r_0 \exp\left(\frac{-r_0^2 k_x^2}{2\pi \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right)}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + i k_x x_{c2}} e^{-i k_x x_{c2}} e^{-i k_z z_{c2}} \left(-\frac{C_{span} z_{c2}}{\sqrt{2\pi}} - i \frac{C_{chord} r_0^2 k_x}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right) dz_{c2}. \end{aligned} \quad (C.74)$$

En utilisant :

$$C_{Ta} = \frac{C_{Amp} \sqrt{2\pi} r_0 \exp\left(\frac{-r_0^2 \omega^2}{U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right)}{U_c \sin(\varphi + \gamma_2)}, \quad (C.75)$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{Ta-1}(k_x, k_z) &= \\ &- C_{Ta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + i k_x x_{c2}} e^{-i k_x x_{c2}} e^{-i k_z z_{c2}} \frac{C_{span} z_{c2}}{\sqrt{2\pi}} dz_{c2}, \end{aligned} \quad (C.76)$$

et :

$$\tilde{G}^{Ta-2}(k_x, k_z) = -C_{Ta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c_\beta^2 z_{c2}^2}{2r_0^2} + i k_x x_{c2}} e^{-i k_x x_{c2}} e^{-i k_z z_{c2}} i \frac{C_{chord} r_0^2 k_x}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)} dz_{c2}. \quad (C.77)$$

En utilisant les équations (17.33-19) [ETI 73 (19)] p.1123 et (17.23-13) [SU 51] p.1120 données par [1] on obtient directement :

$$\tilde{G}^{Ta}(k_x, k_z) = \tilde{G}^{Ta-1}(k_x, k_z) + \tilde{G}^{Ta-2}(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{2\pi} i r_0^2}{c_\beta} C_{Ta} \left[\frac{r_0 k_z C_{span}}{c_\beta^2 \sqrt{2\pi}} - \frac{r_0 k_x C_{chord}}{\sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right] \exp \left(\frac{-r_0^2 k_z^2}{2c_\beta^2} \right). \quad (C.78)$$

C.4 Fluctuation de vitesse générée par la vitesse axiale du tourbillon

Dans cette partie, l'*upwash* provenant du déficit de vitesse axiale est calculé. À partir de l'éq. (C.8) on obtient :

$$w^{Ga}(x_{c2}, z_{c2}, t) = (\cos \beta \sin(\gamma_2 + \varphi)) u_z(x_{c2}, z_{c2}, t), \quad (C.79)$$

ce qui en utilisant un déficit de vitesse axiale gaussien défini par :

$$u_z(r, \theta, z) = u_z^{max} e^{-r^2/r_0^2}, \quad (C.80)$$

permet d'obtenir :

$$w^{Ga}(x_{c2}, z_{c2}, t) = (\cos \beta \sin(\gamma_2 + \varphi)) u_z^{max} e^{-((c_\beta z_{c2})^2 + \sin(\gamma_2 + \varphi)^2 \left(x_{c2} - \frac{\Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) t}{\sin(\gamma_2 + \varphi)} \right)^2) / r_0^2}. \quad (C.81)$$

En utilisant la même méthodologie que pour la vitesse azimutale, on calcule tout d'abord la transformée de Fourier temporelle de l'*upwash* :

$$\tilde{w}^{Ga}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((c_\beta z_{c2})^2 + \sin(\gamma_2 + \varphi)^2 \left(x_{c2} - \frac{\Omega R_{VI} \sin(\gamma_2) t}{\sin(\gamma_2 + \varphi)} \right)^2) / r_0^2} \exp(i\omega t) dt, \quad (C.82)$$

avec $C_1 = \cos \beta \sin(\gamma_2 + \varphi) u_z^{max} / (2\pi)$. En utilisant le changement de variable ($\varepsilon = x_{c2} - U_c t$), on obtient :

$$\tilde{w}^{Ga}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) = \frac{C_1 \exp(i k_x x_{c2})}{U_c} \frac{r_0}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \gamma_2)} \exp \left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{4 U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)} \right) e^{-\frac{(c_\beta z_{c2})^2}{r_0^2}}. \quad (C.83)$$

La décomposition de l'*upwash* en nombres d'onde dans les directions de la corde (k_x) et de l'envergure (k_z) permet d'obtenir :

$$\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(x_{c2}, z_{c2}, \omega) e^{-ik_x x_{c2}} e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2},$$

$$\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z, \omega) = \frac{C_1 r_0}{2U_c \sqrt{2\pi} \sin(\varphi + \gamma_2)} \exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{4U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(c_\beta z_{c2})^2}{r_0^2}} e^{-ik_z z_{c2}} dz_{c2}. \quad (\text{C.84})$$

En utilisant la constante

$$C_2 = \frac{C_1 r_0}{2U_c \sqrt{2\pi} \sin(\varphi + \gamma_2)} \exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{4U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right), \quad (\text{C.85})$$

et la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne on obtient :

$$\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z) = C_2 \frac{r_0}{\sqrt{2}c_\beta} \exp\left(-\frac{k_z^2 r_0^2}{4c_\beta^2}\right). \quad (\text{C.86})$$

Finalement, l'expression complète de $\tilde{G}(k_x, k_z)$ s'écrit :

$$\tilde{G}^{Ga}(k_x, k_z) = \frac{u_z^{max} \cos \beta r_0}{4\pi U_c c_\beta} \exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{4U_c^2 \sin^2(\varphi + \gamma_2)}\right) \frac{r_0}{\sqrt{2}c_\beta} \exp\left(-\frac{k_z^2 r_0^2}{4c_\beta^2}\right) \quad (\text{C.87})$$

ANNEXE D

Calcul de la correction d'extrémité avec condition d'annulation du potentiel en tête de pale

D.1 Description du problème

Le point de départ de la correction d'extrémité est les sauts de pression instationnaires donnés par l'éq.(3.35) pour une pale d'envergure infinie. On utilise aussi les CL de l'éq. (3.46). Les étapes pour la résolution de la correction d'extrémité sont donc :

1. Intégrer les sauts de pression des itérations 1 et 2 d'A-S d'une pale d'envergure infinie afin d'obtenir les potentiels de vitesse associés à ces solutions respectivement φ'_{LE} et φ'_{TE} .
2. Effectuer la Transformée de Fourier (TF) axiale de ces potentiels de vitesse ($\hat{\varphi}'$) pour se ramener à des rafales élémentaires dans la direction \mathbf{e}_{xc2} .
3. Appliquer la solution de Schwarzschild. On obtient alors $\hat{\varphi}'_t$ pour calculer la correction de saumon.
4. Calculer les sauts de pression résultants $\hat{l}'_{t,LE}$ et $\hat{l}'_{t,TE}$.

D.2 Calcul des potentiels de vitesse

On remonte au potentiel de vitesse associé par intégration de l'éq. (3.35) avec la dérivée convective D/Dt de l'éq. (3.30). Cette formule utilise deux vitesses de convection du fait de la flèche et de l'angle de contraction de la veine fluide du problème. Le potentiel s'écrit $\phi = \Phi e^{i(k'_z z'_{c2} - \omega t)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= -\rho_0 \left(-i\omega\Phi + U_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x'_{c2}} + ik'_z U_2 \Phi \right) \\ &= \rho_0 c_0 \left(i(k - M_2 k'_z) \Phi - M_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x'_{c2}} \right). \end{aligned} \quad (D.1)$$

En se ramenant aux grandeurs adimensionnées décrites par l'éq. (3.27) on obtient :

$$\tilde{l} = \frac{\rho_0 U_1}{b} \left(ik'^*_{x'} \tilde{\Phi} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x'^*_{c2}} \right). \quad (D.2)$$

Cette équation différentielle ordinaire d'ordre 1 a comme solution homogène :

$$\tilde{\Phi}_{ho}(x'^*_{c2}, 0, z'^*_{c2}) = A e^{ik'^*_{x'} x'^*_{c2}}. \quad (D.3)$$

Pour la solution de l'éq. (D.2) on utilise la méthode de la variation de la constante :

$$\tilde{\Phi}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = A(x_{c2}^*) e^{ik_x^* x_{c2}^*}. \quad (D.4)$$

On remplace la solution ci-dessus dans l'éq. (D.2) :

$$A(x_{c2}^*) = \int_{-\infty}^{x_{c2}^*} \frac{-b}{\rho_0 U_1} e^{-ik_x^* \xi} \tilde{l}(\xi, z_{c2}^*, 0) d\xi. \quad (D.5)$$

La solution totale donne alors :

$$\tilde{\Phi}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = \int_{-\infty}^{x_{c2}^*} \frac{-b}{\rho_0 U_1} e^{ik_x^* (x_{c2}^* - \xi)} \tilde{l}(\xi, z_{c2}^*, 0) d\xi. \quad (D.6)$$

Cette expression généralise celle d'Amiet [8][eq. (11)] au complexe conjugué près qui provient des conventions de transformées de Fourier différentes. Il reste alors à introduire les solutions de pression décrites dans les eq. (D.6).

D.2.1 Terme de bord d'attaque

Le calcul s'effectue d'abord sur le terme de bord d'attaque décrit dans l'éq. (3.35) :

$$\tilde{l}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = -\rho_0 U_1 \tilde{G}(k_x, k_z) \frac{e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x_{c2}^* + ik_z^* z_{c2}^* + i\pi/4}}{\sqrt{\pi(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)x_{c2}^*}}, \quad (D.7)$$

écrit cette fois-ci dans le repère $R_{p'}$. En remplaçant cette expression dans l'éq. (D.6) on obtient :

$$\tilde{\Phi}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = \frac{b\tilde{G}(k_x, k_z) e^{i\pi/4} e^{i(k_x^* x_{c2}^* + k_z^* z_{c2}^*)}}{\sqrt{\pi(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)}} \int_0^{x_{c2}^*} \frac{e^{-i(\mu M_1 - \kappa + k_x^*)\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi. \quad (D.8)$$

L'intégrale commence à partir de $x_{c2}^* = 0$ puisque le potentiel est nul avant le bord d'attaque (provient des conditions aux limites) et l'utilisation de l'équation D.1. Or $M_1 \mu = M_1^2 k_x^* / \beta_1^2$, donc nous avons la simplification suivante :

$$M_1 \mu - \kappa + k_x^* = (M_1^2 + (1 - M_1^2))k_x^* / \beta_1^2 - \kappa = \bar{k}_x^* - \kappa, \quad (D.9)$$

avec $\bar{k}_x^* = k_x^* / \beta_1^2$. En appliquant le changement de variable $\epsilon = (\bar{k}_x^* - \kappa)\xi$, on obtient :

$$\tilde{\Phi}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = \frac{b\tilde{G}(k_x, k_z) e^{i\pi/4} e^{i(k_x^* x_{c2}^* + k_z^* z_{c2}^*)}}{\sqrt{\pi(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)}} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{k}_x^* - \kappa}} \int_0^{(\bar{k}_x^* - \kappa)x_{c2}^*} \frac{e^{-i\epsilon}}{\sqrt{2\pi\epsilon}} d\epsilon, \quad (D.10)$$

soit encore :

$$\tilde{\Phi}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = \frac{b\tilde{G}(k_x, k_z) e^{i(k_x^* x_{c2}^* + k_z^* z_{c2}^*)}}{\sqrt{(k_x^* + \beta_1^2 \kappa)(\bar{k}_x^* - \kappa)}} [(1 + i)E^*((\bar{k}_x^* - \kappa)x_{c2}^*)]. \quad (D.11)$$

D.2.2 Terme de bord de fuite

On considère ensuite le second terme de pression instationnaire :

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{TE}(x_{c2}'^*, 0, z_{c2}'^*) = & 2\rho_0 U_1 \tilde{G}(k_x, k_z) \frac{e^{-i(\mu M_1 - \kappa)x_{c2}'^* + i k_z' z_{c2}'^* + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}} \\ & \times [1 - (1 + i)E^*(2\kappa(x_{c2}'^* - 2))]. \end{aligned} \quad (D.12)$$

On utilise aussi l'éq. (D.2) ou (D.6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{TE}(x_{c2}'^*, 0, z_{c2}'^*) = & \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z)e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)}} e^{i(k_x' x_{c2}'^* + k_z' z_{c2}'^*)} \\ & \times \int_{-\infty}^{x_{c2}'^*} e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\xi} [1 - (1 + i)E^*(2\kappa(\xi - 2))] d\xi. \end{aligned} \quad (D.13)$$

L'intégrale peut être calculée séparément :

$$I_{\Phi_2} = \int_{-\infty}^{x_{c2}'^*} \underbrace{e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\xi}}_{f(\xi)} \underbrace{[1 - (1 + i)E^*(2\kappa(\xi - 2))]}_{G(\xi)} d\xi. \quad (D.14)$$

On commence par effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} F'(\xi) = f(\xi) &= e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\xi} \\ F(\xi) &= ie^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\xi} / (\bar{k}_x'^* - \kappa) \\ G'(\xi) = g(\xi) &= -2\kappa(1 + i)e^{-i(2\kappa(2 - \xi))} / \left(\sqrt{2\pi(2\kappa(\xi - 2))} \right) \\ G(\xi) &= 1 - (1 + i)E^*(2\kappa(\xi - 2)) \end{aligned} \quad (D.15)$$

En appliquant les fonctions décrites ci-dessus on obtient :

$$I_{\Phi_2} = [F(\xi)G(\xi)]_{-\infty}^{x_{c2}'^*} - \int_{-\infty}^{x_{c2}'^*} F(\xi)g(\xi) d\xi, \quad (D.16)$$

ce qui donne :

$$[F(\xi)G(\xi)]_{-\infty}^{x_{c2}'^*} = ie^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)x_{c2}'^*} \frac{(1 - (1 + i)E^*(2\kappa(x_{c2}'^* - 2)))}{\bar{k}_x'^* - \kappa}, \quad (D.17)$$

et :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{x_{c2}^{I*}} F(\xi)g(\xi) \, d\xi &= \frac{-2i\kappa(1+i)e^{2i(\bar{k}_x^{I*}-\kappa)}}{\bar{k}_x^{I*}-\kappa} \int_{-\infty}^{x_{c2}^{I*}} \frac{e^{-i(\bar{k}_x^{I*}+\kappa)(\xi-2)}}{\sqrt{2\pi(2\kappa(\xi-2))}} \, d\xi \\
 &= \frac{-i(1+i)e^{2i(\bar{k}_x^{I*}-\kappa)}}{\bar{k}_x^{I*}-\kappa} \sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x^{I*}+\kappa}} \left[E^* \left((\bar{k}_x^{I*}+\kappa)(2-x_{c2}^{I*}) \right) \pm \frac{1-i}{2} \right] \\
 &= \frac{ie^{2i(\bar{k}_x^{I*}-\kappa)}}{\bar{k}_x^{I*}-\kappa} \sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x^{I*}+\kappa}} \left[1 \pm (1+i)E^* \left((\bar{k}_x^{I*}+\kappa)(x_{c2}^{I*}-2) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

Le choix \pm provient de la convention de Fourier. Il faut sélectionner la branche complexe qui donne une fonction qui tend vers 0 à l'infini. La figure D.1 présente le tracé des fonctions $(1+i)E^*(z)+1$ et $(1+i)E^*(z)-1$. On utilisera la branche négative de la solution qui tend vers 0 en $+\infty$.

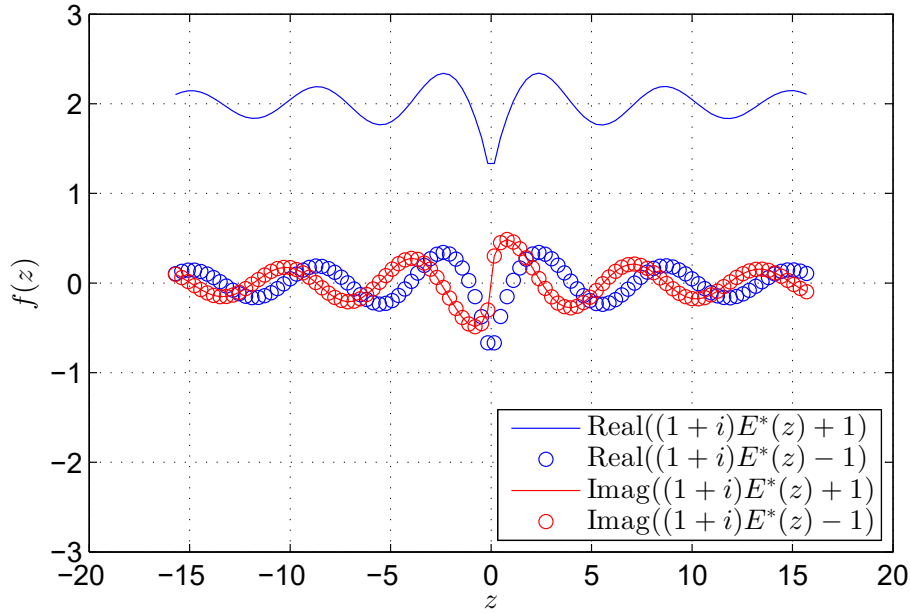


Figure D.1 Tracé des fonctions $(1+i)E^*(z)+1$ et $(1+i)E^*(z)-1$.

Si l'on assemble les deux parties de la solution, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_{TE}(x_{c2}^{I*}, 0, z_{c2}^{I*}) &= \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z)e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi(k_x^{I*} + \beta_1^2\kappa)}} \frac{e^{-i(\bar{k}_x^{I*}-\kappa)x_{c2}^{I*}}}{\bar{k}_x^{I*}-\kappa} e^{i(k_x^{I*}x_{c2}^{I*} + k_z^{I*}z_{c2}^{I*})} \\
 &\times \left\{ \mathbb{F}(2\kappa, x_{c2}^{I*}-2) - \sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x^{I*}+\kappa}} e^{-i(\bar{k}_x^{I*}-\kappa)[2-x_{c2}^{I*}]} \mathbb{F}(\bar{k}_x^{I*}+\kappa, x_{c2}^{I*}-2) \right\},
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

avec :

$$\mathbb{F}(K, X) = 1 - (1+i)E^*(KX). \tag{D.20}$$

D.3 Transformée de Fourier axiale des potentiels de vitesse

La solution des potentiels pour une pale d'envergure infinie avec flèche soumise à un écoulement oblique est $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{LE} + \tilde{\Phi}_{TE}$. On va désormais corriger cette solution pour tenir compte de la géométrie finie au saumon. On considère désormais l'écoulement oblique incident sur le saumon. Pour ce faire, on décompose les potentiels de vitesse en rafales élémentaires dans la direction axiale (x_{c2}^*). Il est important de préciser que cette direction axiale est différente de la direction (x_{c2}') qui prend en compte la flèche de la pale Ψ . Comme on suppose que le potentiel de vitesse est nul avant le bord d'attaque, notre transformée de Fourier axiale s'effectuera depuis le bord d'attaque ($x_{c2}^* = 0$). La première sous-étape de la transformée de Fourier consiste à écrire les solutions dans le repère ($x_{c2}^*, y_{c2}^*, z_{c2}^*$). Si on rappelle les conventions de repère définies par l'éq. (3.18) on a :

$$\begin{cases} x_{c2}' = \cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^* \\ \frac{z_{c2}'}{\beta_1} = \sin \Psi x_{c2}^* + \cos \Psi z_{c2}^* \end{cases} \quad (D.21)$$

Lorsqu'on utilise ce changement de base dans les potentiels de vitesse (eq. (D.11) et eq. (D.19)), on obtient :

$$\tilde{\Phi}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) = \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z)e^{i(k_x^*x_{c2}^* + k_z^*z_{c2}^*)}}{\sqrt{(k_x'^* + \beta_1^2\kappa)(\bar{k}_x'^* - \kappa)}} \left[(1+i)E^*((\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*)) \right], \quad (D.22)$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{TE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) &= \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z)e^{-i\pi/4} e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*)}}{\sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2\kappa)}} \frac{\bar{k}_x'^* - \kappa}{\bar{k}_x'^* - \kappa} e^{i(k_x^*x_{c2}^* + k_z^*z_{c2}^*)} \\ &\times \left\{ \mathbb{F}(2\kappa, f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)) - \sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x'^* + \kappa}} e^{i(\bar{k}_x'^* - \kappa)f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)} \mathbb{F}(\bar{k}_x'^* + \kappa, f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)) \right\}, \end{aligned} \quad (D.23)$$

avec $f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*) = \cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^* - 2$. On rappelle aussi l'éq. (3.19) modifiée :

$$\begin{cases} k_x^* = \cos \Psi k_x'^* + \beta_1 \sin \Psi k_z'^* \\ k_z^* = -\sin \Psi k_x'^* + \beta_1 \cos \Psi k_z'^* \end{cases}. \quad (D.24)$$

Comme pour l'intégration du potentiel on calcule successivement les potentiels obtenus des itérations 1 (LE) et 2 (TE). On remarque que la fonction $\mathbb{F}(K, X)$ se retrouve dans les deux potentiels. Cette fonction peut se réécrire avec la fonction erreur complexe $\Phi^0(z)$ [1], ce qui peut s'avérer plus simple dans la suite du développement. La fonction de Fresnel utilisée par Amiet [8] est définie par :

$$E(z) = C_2(z) + iS_2(z), \quad (D.25)$$

avec les équations (7.3.3) et (7.3.4) p. 300 [1] :

$$\begin{cases} C_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt \\ S_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \end{cases}. \quad (\text{D.26})$$

On a donc :

$$E(z) = \frac{1+i}{2} \Phi^0 \left(\sqrt{-iz} \right), \quad (\text{D.27})$$

et :

$$E^*(z) = \frac{1-i}{2} \Phi^0 \left(\sqrt{iz} \right). \quad (\text{D.28})$$

La fonction \mathbb{F} définie plus haut peut directement utiliser la transformation en fonction erreur complexe :

$$\mathbb{F}(K, X) = 1 - \Phi^0 \left(\sqrt{iKX} \right), \quad (\text{D.29})$$

D.3.1 TF axiale du terme de bord d'attaque

On applique la transformée de Fourier sur le terme de bord d'attaque avec les conventions décrites à la Section 2.4.2 :

$$\hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tan \Psi z_{c2}^*}^{+\infty} \tilde{\Phi}_{LE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) e^{-i\varepsilon x_{c2}^*} dx_{c2}^*. \quad (\text{D.30})$$

En utilisant l'éq. (D.22) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) &= A_{\Phi_{LE}} \int_{\tan \Psi z_{c2}^*}^{+\infty} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)x_{c2}^*} \\ &\times \left[(1+i)E^* \left((\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*) \right) \right] dx_{c2}^*, \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

avec :

$$A_{\Phi_{LE}} = \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z) e^{ik_z^* z_{c2}^*}}{2\pi \sqrt{(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)(\bar{k}_x'^* - \kappa)}}. \quad (\text{D.32})$$

Les bornes de l'intégration vont de $\tan \Psi z_{c2}^*$ qui correspond au bord d'attaque $x_{c2}'^* = 0$ à l'infini en aval du profil. Le potentiel-solution est nul en amont du profil par la CL. (3.29.1) ce qui explique pourquoi la transformation de Fourier ne s'étend pas de $-\infty$ à $+\infty$. On

utilise l'écriture de $E^*(z)$ avec la fonction erreur complexe (éq. (D.28)) :

$$\hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = A_{\Phi_{LE}} \int_{\tan \Psi z_{c2}^*}^{+\infty} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)x_{c2}^*} \Phi^0 \left(\sqrt{i(\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*)} \right) dx_{c2}^* \quad (D.33)$$

On applique le changement de variable suivant $\epsilon = \cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*$:

$$\hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = A_{\Phi_{LE}} \frac{e^{-i(\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi z_{c2}^*}}{\cos \Psi} \int_0^{+\infty} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)\epsilon / \cos \Psi} \Phi^0 \left(\sqrt{i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\epsilon} \right) d\epsilon. \quad (D.34)$$

On utilise alors la formule de Gradshteyn et Ryzhik [61][EH II 148(12)] :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \Phi^0(\sqrt{\alpha x}) dx = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}, \quad (D.35)$$

avec $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta + \alpha) > 0$. Dans notre cas, on définit :

$$\begin{cases} \alpha = i(\bar{k}_x'^* - \kappa) \\ \beta = i(\varepsilon - k_x^*) / \cos \Psi + \Delta \end{cases} \quad (D.36)$$

Δ revient à rajouter une dissipation visqueuse suffisante pour que la solution converge en 0 à l'infini. Si $\Delta \rightarrow 0$ on a alors :

$$\hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = -iA_{\Phi_{LE}} \frac{e^{-i(\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi z_{c2}^*}}{\varepsilon - k_x^*} \frac{1}{\varepsilon - k_x^*} \sqrt{\frac{\cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}{\varepsilon - k_x^* + \cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}}. \quad (D.37)$$

L'expression finale s'écrit :

$$\hat{\Phi}_{LE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = \frac{ib\beta_1 \tilde{G}(k_x, k_z) e^{ik_z^* z_{c2}^*}}{2\pi \sqrt{k_x'^*{}^2 - (\beta_1^2 \kappa)^2}} \frac{e^{-i(\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi z_{c2}^*}}{\varepsilon - k_x^*} \sqrt{\frac{\cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}{\varepsilon - k_x^* + \cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}}, \quad (D.38)$$

D.3.2 TF axiale du terme de bord de fuite

On applique maintenant la transformée de Fourier sur le terme de bord de fuite :

$$\hat{\Phi}_{TE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} \tilde{\Phi}_{TE}(x_{c2}^*, 0, z_{c2}^*) e^{-i\varepsilon x_{c2}^*} dx_{c2}^*. \quad (D.39)$$

Les bornes de la transformée de Fourier ne s'étendent pas de $-\infty$ à $+\infty$ puisque la solution de l'itération 2 n'est valable que jusqu'au bord de fuite. De manière compacte les éqs. (D.23) et (D.39) se combinent pour donner :

$$\hat{\Phi}_{TE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = A_{\Phi_{TE}} \int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} (I_{\Phi_{TE}}^1 + I_{\Phi_{TE}}^2) dx_{c2}^*, \quad (D.40)$$

avec :

$$\begin{cases} A_{\Phi_{TE}} = \frac{-b\tilde{G}(k_x, k_z)e^{-i\pi/4} e^{i(k_z^* z_{c2}^*)}}{2\pi\sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)} \bar{k}_x'^* - \kappa} \\ I_{\Phi_{TE}}^1 = e^{-i(\varepsilon - k_x^*)x_{c2}^*} e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*)} \mathbb{F}(2\kappa, f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)) \\ I_{\Phi_{TE}}^2 = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x'^* + \kappa}} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)x_{c2}^*} e^{-2i(\bar{k}_x'^* - \kappa)} \mathbb{F}(\bar{k}_x'^* + \kappa, f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)) \end{cases} \quad (D.41)$$

On calcule alors chaque terme séparément :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^1 dx_{c2}^* \\ &= \int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)x_{c2}^*} e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)(\cos \Psi x_{c2}^* - \sin \Psi z_{c2}^*)} \mathbb{F}(2\kappa, f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)) dx_{c2}^* \end{aligned} \quad (D.42)$$

On applique le changement de variable $\xi = f_\psi(x_{c2}^*, z_{c2}^*)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^1 dx_{c2}^* = e^{-2i(\bar{k}_x'^* - \kappa)} e^{-i(\varepsilon - k_x^*)[2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*]} \\ & \times \int_{-\infty}^0 e^{-i(\varepsilon - k_x^*)/\cos \Psi \xi} e^{-i(\bar{k}_x'^* - \kappa)\xi} \mathbb{F}(2\kappa, \xi) \frac{d\xi}{\cos \Psi} \\ &= \frac{e^{-2i(\kappa_1 + \kappa_2) - i\kappa_2 \sin \Psi z_{c2}^*}}{\cos \Psi} \int_{-\infty}^0 e^{-i(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} \mathbb{F}(2\kappa, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (D.43)$$

avec les nombres d'ondes :

$$\begin{cases} \kappa_1 = (\bar{k}_x'^* - \kappa) \\ \kappa_2 = \frac{\varepsilon - k_x^*}{\cos \Psi} \end{cases} \quad (D.44)$$

On note que :

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{\cos \Psi (\mu M_1 - \kappa) + (\varepsilon - \beta_1 \sin \Psi k_z'^*)}{\cos \Psi}. \quad (D.45)$$

Cette expression est proche de l'éq. (3.36) à un coefficient de compressibilité β_1 près. En utilisant l'expression [61][ETII 307(5)], on écrit :

$$\int_{-\infty}^{2/\cos \Psi + \tan \Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^1 dx_{c2}^* = \frac{ie^{-2i(\kappa_1 + \kappa_2) - i\kappa_2 \sin \Psi z_{c2}^*}}{\cos \Psi (\kappa_1 + \kappa_2)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{2\kappa + (\kappa_1 + \kappa_2)}} \right\}, \quad (D.46)$$

avec :

$$2\kappa + (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{\cos \Psi (\mu M_1 + \kappa) + (\varepsilon - \beta_1 \sin \Psi k_z'^*)}{\cos \Psi}. \quad (D.47)$$

Toutes simplifications effectuées , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{2/\cos\Psi + \tan\Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^1 dx_{c2}^* \\ &= \frac{ie^{-2i(\kappa_1 + \kappa_2) - i\kappa_2 \sin\Psi z_{c2}^*}}{\cos\Psi(\kappa_1 + \kappa_2)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa}} \right\} \end{aligned} \quad (D.48)$$

On intègre la deuxième partie de l'éq. (D.40) :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{2/\cos\Psi + \tan\Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^2 dx_{c2}^* = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\bar{k}_x^* + \kappa}} \frac{e^{-i\kappa_2(2 + \sin\Psi z_{c2}^*)} e^{-2i\kappa_1}}{\cos\Psi} \\ & \times \int_{-\infty}^0 e^{-i\kappa_2\xi} \mathbb{F}(\bar{k}_x^* + \kappa, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (D.49)$$

En appliquant la même expression [61][ETII 307(5)], on obtient :

$$\int_{-\infty}^{2/\cos\Psi + \tan\Psi z_{c2}^*} I_{\Phi_{TE}}^2 dx_{c2}^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{2\kappa + \kappa_1}} \frac{ie^{-i\kappa_2(2 + \sin\Psi z_{c2}^*)} e^{-2i\kappa_1}}{\varepsilon - k_x^*} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa + \kappa_1}{2\kappa + \kappa_1 + \kappa_2}} \right\}, \quad (D.50)$$

Finalement, si l'on assemble les résultats, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{TE}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) &= iA_{\Phi_{TE}} e^{-i\kappa_2 \sin\Psi z_{c2}^*} e^{-2i(\kappa_1 + \kappa_2)} \\ &\times \left[\frac{1}{\cos\Psi(\kappa_1 + \kappa_2)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa}} \right\} + \frac{1}{\varepsilon - k_x^*} \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa}{2\kappa + \kappa_1}} - \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (D.51)$$

Cette expression est simple quand on regarde les dépendances dans la direction de l'envergure (z_{c2}^*). En effet pour le potentiel de bord d'attaque ou de bord de fuite, les résultats à cette étape du développement sont des exponentielles complexes. On pourra donc calculer les solutions de Schwarzschild dans la direction z_{c2}^* analytiquement. Par contre, de manière identique à ce qui a été effectué par Roger *et al.* [128], on remarque que la transformée de Fourier inverse axiale ne sera pas calculable analytiquement.

D.4 Solutions de Schwarzschild

D.4.1 Équation des ondes convectées

L'équation des ondes convectées est écrite dans le repère de la pale sans angle de flèche R_p puisque le saumon de pale est choisi à $z_{c2} = 0$. Les vitesses de convection du problème sont alors :

$$\mathbf{U}_0 = U_1 \mathbf{e}_{xc2'} + U_2 \mathbf{e}_{zc2'} = U_x \mathbf{e}_{xc2} + U_z \mathbf{e}_{zc2}, \quad (D.52)$$

avec les vitesses $U_x = |\mathbf{U}_0| \cos(-\beta)$ et $U_z = |\mathbf{U}_0| \sin(-\beta)$. Dans les conventions de repère choisi, on remarque qu'un angle de contraction de la veine fluide positif induit une vitesse radiale négative. Ceci est cohérent avec la figure 1.14. Pour un potentiel de vitesse $\hat{\Phi} e^{-i\omega t}$ harmonique avec les conventions de Fourier décrites dans la Section 2.4.2 l'équation des ondes convectées complète s'écrit :

$$\beta_x^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial^2 x_{c2}} + \beta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial^2 z_{c2}} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial^2 y_{c2}} + 2ik \left(M_x \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x_{c2}} + M_z \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z_{c2}} \right) - 2M_x M_z \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x_{c2} \partial z_{c2}} + k^2 \hat{\Phi} = 0, \quad (\text{D.53})$$

avec $M_x = U_x/c_0$, $M_z = U_z/c_0$, $\beta_x = \sqrt{1 - M_x^2}$ et $\beta_z = \sqrt{1 - M_z^2}$. Le potentiel de vitesse est transformé cette fois-ci dans la direction radiale \mathbf{e}_{zc2} . $\hat{\Phi} = \varphi e^{i\varepsilon x_{c2}/b}$ avec $b = c_2/2$. En effet, le nombre d'onde ε est un nombre d'onde adimensionnel. Quand on remplace le nouveau potentiel dans l'équation, on obtient :

$$\beta_z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 z_{c2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y_{c2}} + 2iM_z k_z \frac{\partial \varphi}{\partial z_{c2}} + \left(\left(k - M_x \frac{\varepsilon}{b} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2 \right) \varphi = 0. \quad (\text{D.54})$$

On utilise l'équation de dispersion dans le repère R_p :

$$k = M_x \frac{\varepsilon}{b} + M_z k_z. \quad (\text{D.55})$$

Si maintenant on applique la transformation de Reissner [123] $\varphi = \varphi' e^{-ik_z M_z^2 z_{c2}/\beta_z^2}$, on obtient :

$$\beta_z^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 z_{c2}} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 y_{c2}} + \kappa_t^2 \varphi' = 0, \quad (\text{D.56})$$

le nombre de Helmholtz de l'équation est :

$$\kappa_t^2 = \frac{(k - M_x \varepsilon/b)^2}{\beta_z^2} - \frac{\varepsilon^2}{b^2}. \quad (\text{D.57})$$

avec l'adimensionnement $x_{c2}^\circ = \beta_z x_{c2}/b$, $y_{c2}^\circ = \beta_z y_{c2}/b$ et $z_{c2}^\circ = z_{c2}/b$ on obtient au final :

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 z_{c2}^\circ} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial^2 y_{c2}^\circ} + \kappa_t^{*2} \varphi' = 0, \quad (\text{D.58})$$

et κ_t^* le nombre de Helmholtz adimensionnel de la transformation vaut :

$$\kappa_t^{*2} = \frac{1}{\beta_z^2} (\beta_z^2 \mu_z^2 - \varepsilon^2) = \mu_z^2 \left(1 - \frac{1}{\Theta_z^2} \right), \quad (\text{D.59})$$

avec $\mu_z = (k^* - M_x \varepsilon)/\beta_z^2$ et $\Theta_z = \beta_z \mu_z/\varepsilon$ le paramètre de Graham [62]. Ce résultat est à mettre en parallèle avec les développements classiques de la méthode d'A-S sauf que le problème est écrit dans la direction \mathbf{e}_{zc2} .

D.4.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour le problème d'impact au niveau du saumon sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\varphi}'_t = -(\hat{\varphi}'_{LE} + \hat{\varphi}'_{TE}) & , z_{c2}^\circ \geq 0, \\ \left. \frac{\partial \hat{\varphi}'_t}{\partial y_{c2}^\circ} \right|_{y_{c2}^\circ=0} = 0 & , z_{c2}^\circ < 0. \end{array} \right. \quad (D.60)$$

On remarque cependant que l'adimensionnement en z_{c2} est le même pour les deux problèmes de Schwarzschild. On a donc $z_{c2}^* = z_{c2}^\circ$. Les potentiels $\hat{\varphi}'_{LE}$ et $\hat{\varphi}'_{TE}$ sources provenant des problèmes de bord d'attaque et de bord de fuite sont modifiés par les transformations précédentes. De plus, puisque le problème s'écrit dans la direction de l'envergure on simplifiera :

$$\hat{\varphi}'_\bullet = \hat{\Phi}_\bullet^\diamond(\varepsilon) e^{i(k^* - M_x \varepsilon) M_z z_{c2}^* / \beta_z^2 + i k_z^* z_{c2}^* - i(\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi z_{c2}^*}, \quad (D.61)$$

• peut prendre la valeur LE ou TE suivant la solution considérée. Les termes $\hat{\Phi}_{LE}^\diamond(\varepsilon)$ et $\hat{\Phi}_{TE}^\diamond(\varepsilon)$ valent :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{LE}^\diamond(\varepsilon) &= \frac{i b \beta_1 \tilde{G}(k_x, k_z)}{2\pi \sqrt{k_x'^2 - (\beta_1^2 \kappa)^2}} \frac{e^{-i\varepsilon x_{c2}^*}}{\varepsilon - k_x^*} \sqrt{\frac{\cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}{\varepsilon - k_x^* + \cos \Psi (\bar{k}_x'^* - \kappa)}}, \\ \hat{\Phi}_{TE}^\diamond(\varepsilon) &= \frac{-b \tilde{G}(k_x, k_z) e^{i\pi/4}}{2\pi \sqrt{2\pi(k_x'^* + \beta_1^2 \kappa)} \bar{k}_x'^* - \kappa} \frac{e^{-i\varepsilon x_{c2}^*}}{\bar{k}_x'^* - \kappa} e^{-2i(\kappa_1 + \kappa_2)} \\ &\times \left[\frac{1}{\cos \Psi (\kappa_1 + \kappa_2)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa}} \right\} + \frac{1}{\varepsilon - k_x^*} \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa}{2\kappa + \kappa_1}} - \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (D.62)$$

Le nombre d'onde des termes sources κ_s s'écrit :

$$\kappa_s = -\frac{(k^* - M_x \varepsilon) M_z}{\beta_z^2} - k_z^* + (\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi. \quad (D.63)$$

D.4.3 Potentiels de vitesse

Les solutions issues des résultats canoniques de la section 3.4.2 s'écrivent alors :

$$\hat{\varphi}'_{t,\bullet}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = \frac{-\hat{\Phi}_\bullet^\diamond(\varepsilon)}{\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{-z_{c2}^*}{\xi}} \frac{1}{\xi - z_{c2}^*} e^{-i\kappa_t^*(\xi - z_{c2}^*)} e^{-i\kappa_s \xi} d\xi. \quad (D.64)$$

En utilisant la formule [61][ET I 136(26)], on obtient :

$$\hat{\varphi}'_{t,\bullet}(\varepsilon, 0, z_{c2}^*) = -\hat{\Phi}_\bullet^\diamond(\varepsilon) e^{-i\kappa_s z_{c2}^*} \left[1 - \Phi^0(\sqrt{-i(\kappa_t^* + \kappa_s) z_{c2}^*}) \right], \quad (D.65)$$

À partir de cette équation, on calcule les solutions en pression.

D.4.4 Solutions en pression

On commence par rappeler l'équation de conservation de la quantité de mouvement (éq. (3.30)) dans le repère R_p :

$$\hat{l}_{t,\bullet} = -\rho_0 \frac{D\Phi_{t,\bullet}}{Dt}, \quad (D.66)$$

avec $\Phi_{t,\bullet} = \hat{\varphi}_{t,\bullet} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} = \hat{\varphi}'_{t,\bullet} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} e^{-i(k - M_x \varepsilon / b) M_z z_{c2}^* / \beta_z^2}$. L'équation se simplifie en :

$$\hat{l}_{t,\bullet} = \left(i \frac{\rho_0 c_0}{b} (k^* - M_x \varepsilon) \right) \hat{\varphi}_{t,\bullet} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} - \frac{\rho_0 c_0 M_z}{b} \frac{\partial \hat{\varphi}_{t,\bullet}}{\partial z_{c2}^*} e^{i\varepsilon x_{c2}^*}. \quad (D.67)$$

Le terme d'advection dans la direction \mathbf{e}_{zc2} est calculé comme la dérivée d'un produit :

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_{t,\bullet}}{\partial z_{c2}^*} = \left(\frac{-i(k^* - M_x \varepsilon) M_z}{\beta_z^2} \hat{\varphi}'_{t,\bullet} + \frac{\partial \hat{\varphi}'_{t,\bullet}}{\partial z_{c2}^*} \right) e^{-i(k^* - M_x \varepsilon) M_z z_{c2}^* / \beta_z^2}. \quad (D.68)$$

En utilisant la définition de la fonction erreur [1][éq. (7.1.1) p. 297] et la propriété de dérivation des intégrales impropres [61][F II 680 p. 21] on obtient :

$$\frac{\partial \hat{\varphi}'_{t,\bullet}}{\partial z_{c2}^*} = i \left\{ \kappa_s \left[1 - \Phi^0(\sqrt{-i(\kappa_s + \kappa_t^*) z_{c2}^*}) \right] e^{-i\kappa_s z_{c2}^*} + (1 + i) \sqrt{\frac{(\kappa_s + \kappa_t^*)}{2\pi z_{c2}^*}} e^{i\kappa_t^* z_{c2}^*} \right\} \hat{\Phi}_{\bullet}^{\diamond}(\varepsilon). \quad (D.69)$$

Dans la suite du développement on néglige alors le terme en M_z^2 qui seront faibles devant les termes en M_z puisque l'écoulement est fortement subsonique dans la direction \mathbf{e}_{zc2} . Finalement la solution en pression finale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \hat{l}_{t,\bullet} = & \frac{-i\hat{\Phi}_{\bullet}^{\diamond}(\varepsilon)\rho_0 c_0}{b} e^{i\varepsilon x_{c2}^*} e^{-i(k^* - M_x \varepsilon) M_z z_{c2}^* / \beta_z^2} \left\{ (M_z((\varepsilon - k_x^*) \tan \Psi - k_z^*) + k^* - M_x \varepsilon) \right. \\ & \times \left. \left[1 - \Phi^0(\sqrt{-i(\kappa_s + \kappa_t^*) z_{c2}^*}) \right] e^{-i\kappa_s z_{c2}^*} + (1 + i) M_z \sqrt{\frac{(\kappa_s + \kappa_t^*)}{2\pi z_{c2}^*}} e^{i\kappa_t^* z_{c2}^*} \right\}. \end{aligned} \quad (D.70)$$

ANNEXE E

Sources acoustiques élémentaires

La notion d'ordre des dérivées spatiales de l'équation de FWH (éq. (1.8)) peut-être associée à la notion de pôle acoustique. En effet dans le cadre d'une source acoustique fixe, il y a une relation entre l'ordre des dérivées spatiales d'une source et le rayonnement de l'acoustique résultante [121]. Cependant, lorsqu'une source est en mouvement la notion de pôle acoustique est floue [47]. À titre d'exemple, le bruit d'épaisseur (bruit monopolaire) peut être modélisé grâce à un ensemble de dipôles équivalents à la surface du volume considéré. Cette méthode, appelé méthode d'Isom [70] est souvent utilisée pour calculer à moindre coût le bruit d'épaisseur des machines tournantes. On considère des sources harmoniques monochromatiques de pulsation ω . Le milieu de propagation est homogène, isotrope et au repos. Ce milieu a donc une vitesse du son c_0 et une masse volumique au repos ρ_0 . Si l'on considère la partie gauche de l'éq. (1.5) dans le domaine harmonique $p' = \tilde{p}'e^{i\omega t}$ on obtient l'équation d'Helmholtz usuelle :

$$(k^2 + \Delta) \tilde{p}' = 0, \quad (\text{E.1})$$

avec $k = \omega/c_0$ le nombre d'ondes acoustique. Cette équation aux dérivées partielles n'admet pas de solution générale. Cependant, en coordonnées sphériques, pour un milieu sans surfaces solides, une solution canonique à variables séparées est calculable. Cette solution suppose que le champ acoustique respecte la condition de Sommerfeld. Cette condition de rayonnement stipule que la solution d'une équation d'Helmholtz tend vers 0 quand la distance source-observateur tend vers l'infini. Dans un repère cartésien $R_0 = (0, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ ou $(0, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\Phi)$ en coordonnées sphériques décrites dans l'Annexe B, la pression acoustique \tilde{p}' s'écrit [121][éq. (6.41) p. 195] :

$$\tilde{p}'(R, \Theta, \Phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{B}_n h_n^{(2)}(kR) \left[\tilde{C}_m \cos(m\Phi) + \tilde{D}_m \sin(m\Phi) \right] \tilde{P}_{n,m}(\cos \Theta), \quad (\text{E.2})$$

avec \tilde{B}_n , \tilde{C}_m et \tilde{D}_m les coefficients d'amplitude du champ acoustique. $\tilde{P}_{n,m}$ sont les fonctions de Legendre et $h_n^{(2)}(X)$ sont les fonctions de Bessel sphériques d'ordre 2 obtenues comme combinaison linéaire des fonctions de Bessel modifiées [1]. Cette solution s'écrit comme une somme infinie de fonctions orthogonales à variables séparées. L'étude des 3 premiers termes de cette série $((0, 0), (1, 0), (2, 0))$ permet d'étudier le comportement canonique d'une onde acoustique.

E.1 Monopôle acoustique

Le terme $(0, 0)$ de la série de fonctions donne :

$$\tilde{p}'_{0,0}(R, \Theta, \Phi) = \tilde{A}_0 h_0^{(2)}(kR) \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \tilde{A}_0 i \frac{e^{-ikR}}{kR}. \quad (\text{E.3})$$

\tilde{A}_0 est une constante à déterminer. La condition physique $kR \rightarrow \infty$ indique que l'observateur est situé en *champ lointain*. D'une part, cette approximation est utile dans les développements suivant en effet l'utilisation d'une fonction inverse distance ($1/R$) plutôt qu'une fonction de Bessel sphérique rend les calculs plus simples. D'autre part, à partir de la formule précédente prise en champ lointain on calcule le vecteur intensité acoustique de cette source. Il se définit comme :

$$\tilde{\mathbf{I}}(R, \Theta, \Phi) = \frac{1}{4}(\tilde{p}'\tilde{\mathbf{u}}^* + \tilde{p}'^*\tilde{\mathbf{u}}) \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\tilde{p}\tilde{p}^*}{2\rho_0 c_0} \mathbf{e}_R, \quad (\text{E.4})$$

avec \mathbf{u} la vitesse acoustique et $(.)^*$ l'opérateur conjugué dans \mathbb{Z} . On définit aussi la puissance acoustique P . Cette puissance est l'intégrale de l'intensité acoustique au travers d'une surface fermée S :

$$P = \int_S \tilde{\mathbf{I}}(R, \Theta, \Phi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{E.5})$$

On remarque qu'en champ lointain, sur une surface sphérique à R constant l'élément différentiel de surface est $d\mathbf{S} = R^2 \sin \Theta dR d\Theta d\Phi \mathbf{e}_R$ alors que $\tilde{p}\tilde{p}^*$ se comporte en $1/R^2$. Cela signifie que la puissance acoustique P est une grandeur conservative en acoustique. Pour $\tilde{p}'_{0,0}$ la puissance acoustique vaut :

$$P_{0,0} \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi \tilde{A}_0 \tilde{A}_0^*}{\rho_0 c_0 k^2}. \quad (\text{E.6})$$

La figure E.1 montre le champ de pression acoustique pour $\tilde{p}'_{0,0}$. On remarque que les fronts d'onde matérialisés par les contours de la fonction forment des cercles concentriques. Ce type de rayonnement est appelé monopôle. Il rayonne en phase dans la direction \mathbf{e}_R et sa décroissance est en $1/R$. On remarque aussi que la formulation asymptotique a un comportement proche de la version complète du monopôle compact. On retrouve cette solution sous le nom de sphère pulsante.

E.2 Dipôle acoustique

De la même manière, on calcule le terme $\tilde{p}'_{1,0}$:

$$\tilde{p}'_{1,0}(R, \Theta, \Phi) = \tilde{A}_0 h_1^{(2)}(kR) \cos \Theta \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} -\tilde{A}_0 \frac{e^{-ikR}}{kR} \left(1 + \frac{1}{ikR}\right) \cos \Theta. \quad (\text{E.7})$$

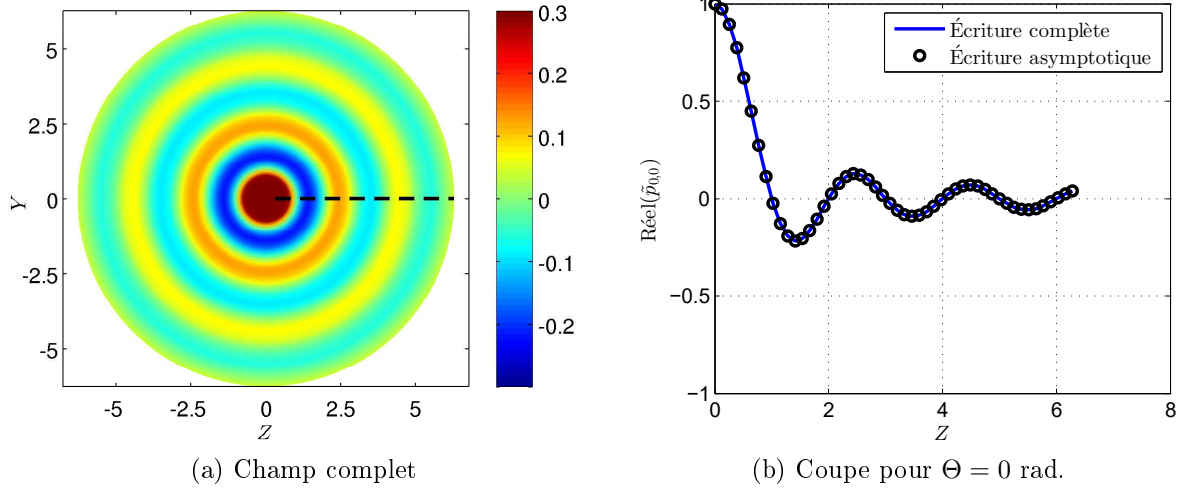


Figure E.1 Partie réelle de la pression acoustique produite par un monopôle. $\tilde{A}_0 = 1$ Pa.s, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340$ m.s⁻¹.

La puissance acoustique associée à cette solution canonique est :

$$P_{1,0} \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2\pi \tilde{A}_0 \tilde{A}_0^*}{3\rho_0 c_0 k^2} \left(1 + \left(\frac{1}{kR} \right)^2 \right). \quad (\text{E.8})$$

La figure E.2 montre que cette fois-ci la directivité du mode (1, 0) a une direction privilégiée (\mathbf{e}_Y). Cette solution est appelée dipôle acoustique. En effet, on peut retrouver la solution $\tilde{p}'_{1,0}$ en utilisant 2 monopôles compacts espacés d'une faible distance d avec $dk \ll 1$ et en opposition de phase. On trouve aussi la solution canonique d'un dipôle acoustique associé au problème de la sphère vibrante.

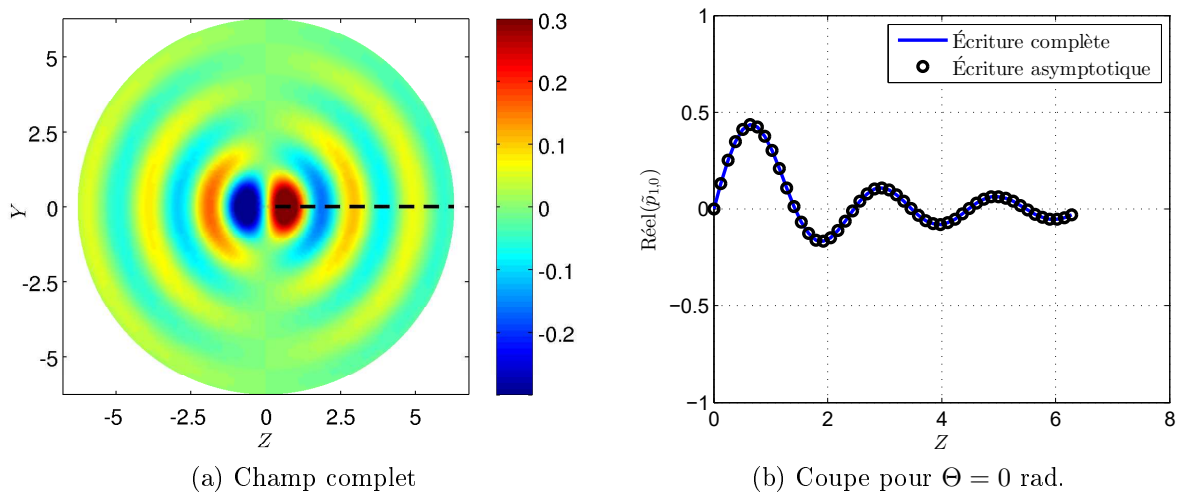


Figure E.2 Partie réelle de la pression acoustique produite par un dipôle. $\tilde{A}_0 = 1$ Pa.s, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340$ m.s⁻¹.

E.3 Quadripôle acoustique

Pour finir, on calcule le terme $\tilde{p}'_{2,0}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{2,0}(R, \Theta, \Phi) &= \frac{1}{2} \tilde{A}_0 h_2^{(2)}(kR) (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ &\underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-i}{2} \tilde{A}_0 \frac{e^{-ikR}}{kR} \left(1 + \frac{3}{ikR} - \frac{3}{(kR)^2} \right) (3 \cos^2 \Theta - 1). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

La puissance acoustique associée à cette solution canonique est :

$$P_{2,0} \underset{kR \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2\pi \tilde{A}_0 \tilde{A}_0^*}{5\rho_0 c_0 k^2} \left(\left(1 - \frac{3}{(kR)^2} \right)^2 + \left(\frac{3}{kR} \right)^2 \right). \quad (\text{E.10})$$

La figure E.3 montre que cette fois-ci la directivité du mode a 2 nœuds dans la direction \mathbf{e}_Θ même si \tilde{A}_0 est identique aux modes inférieurs. Ce type de comportement s'appelle un quadripôle, car la solution de $\tilde{p}_{2,0}$ peut être obtenu avec deux dipôles en opposition de phase tournés de $\pi/2$ la direction \mathbf{e}_Θ .

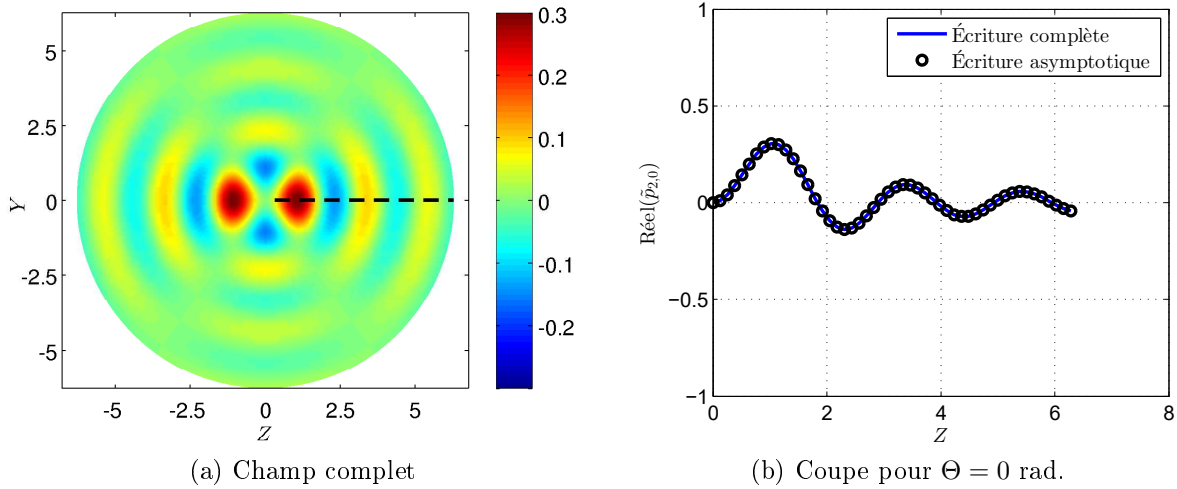
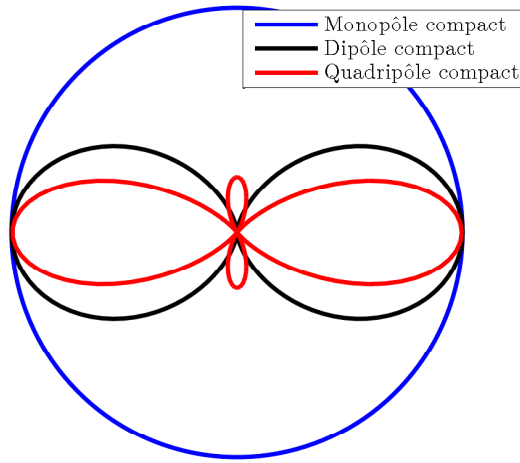
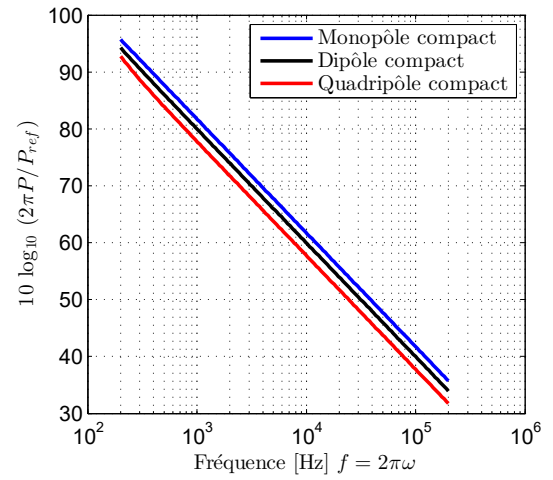


Figure E.3 Partie réelle de la pression acoustique produite par un quadripôle.
 $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\omega = \pi c_0$ et $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

La figure E.4 montre les grandeurs intégrales des différentes solutions canoniques. On remarque qu'il y a une différence de 4 dB entre la puissance d'un monopôle et celle d'un quadripôle même si \tilde{A}_0 est identique pour tout les cas. L'intensité des différentes solutions canoniques montre les zones d'interférences destructives. Ces zones sont responsables de la réduction de la puissance totale. Pour finir, on remarque que les pôles d'ordres supérieurs peuvent être obtenus à partir de combinaisons de monopôles déphasés.



(a) Directivité de l'intensité



(b) Puissance acoustique

Figure E.4 Puissance acoustique et intensité acoustique en champ lointain pour les différentes solutions canoniques, $\tilde{A}_0 = 1 \text{ Pa.s}$, $\rho_0 = 1,14 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\omega = 4000\pi \text{ rad.s}^{-1}$ et $P_{ref} = 10^{-12} \text{ Watt}$.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] Abramowitz, M. et Stegun, I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions, tenth edition*. Applied Mathematics Series, Dover Publications.
- [2] Adamczyk, J. J. (1974). Passage of a swept airfoil through an oblique gust. *Journal of Aircraft*, volume 11, numéro 5, p. 281–287.
- [3] Amiet, R. (1975). Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *Journal of Sound and vibration*, volume 41, numéro 4, p. 407–420.
- [4] Amiet, R. (1975). Correction of open jet wind tunnel measurements for shear layer refraction. Dans *the 2nd Aeroacoustics Conference, Hampton, VA, USA, 24-26 March*. No. 1975-532.
- [5] Amiet, R. (1976). Noise due to turbulent flow past a trailing edge. *Journal of sound and vibration*, volume 47, numéro 3, p. 387–393.
- [6] Amiet, R. (1977). Noise produced by turbulent flow into a propeller or helicopter rotor. *AIAA Journal*, volume 15, numéro 3, p. 307–308.
- [7] Amiet, R. K. (1974). Compressibility effects in unsteady thin-airfoil theory. *AIAA Journal*, volume 12, numéro 2, p. 252–255.
- [8] Amiet, R. K. (1976). High frequency thin-airfoil theory for subsonic flow. *AIAA Journal*, volume 14, numéro 8, p. 1076–1082.
- [9] Banks, D. C. et Singer, B. A. (1995). A predictor-corrector technique for visualizing unsteady flow. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, volume 1, numéro 2, p. 151–163.
- [10] Batchelor, G. (1964). Axial flow in trailing line vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 20, numéro 04, p. 645–658.
- [11] Bennett, G. J., Kennedy, J. et Di Giulio, M. (2013). Wenemor : wind tunnel tests for the evaluation of the installation effects of noise emissions of an open rotor advanced regional aircraft. Dans *the 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Berlin, Germany, 27-29 May*. No. 2013-2092.
- [12] Betz, A. (1933). Behavior of vortex systems. *Technical Report, NACA-TM-713*.
- [13] Blandeau, V. (2011). *Aerodynamic broadband noise from contra-rotating open rotors* (Phd. thesis). University of Southampton, Southampton, UK.
- [14] Blandeau, V., Joseph, P., Kingan, M. et Parry, A. (2013). Broadband noise predictions from uninstalled contra-rotating open rotors. *International Journal of Aeroacoustics*, volume 12, numéro 3, p. 245–282.

- [15] Blandeau, V. P. et Joseph, P. F. (2010). Broadband noise due to rotor-wake/rotor interaction in contra-rotating open rotors. *AIAA Journal*, volume 48, numéro 11, p. 2674–2686.
- [16] Brady, G. W. (1951). Propellers for high powers and transonic speeds. Dans *the Anglo-American aeronautical conference, Brighton, UK, 4-7 Sept.* Royal Aeronautical Society.
- [17] Brandvik, T., Hall, C. et Parry, A. B. (2012). Angle-of-attack effects on counter-rotating propellers at take-off. Dans *ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical Conference and Exposition, Copenhagen, Denmark, 11-15 June*, American Society of Mechanical Engineers. p. 523–534.
- [18] Caradonna, F., Laub, G. et Tung, C. (1984). An experimental investigation of the parallel blade-vortex interaction. *NASA, Ames research space center, St Louis, Mo., USA*, volume NAS 1.15 :86005.
- [19] Carazo, A. (2012). *Semi-analytical prediction of wake-interaction noise in counter-rotating open rotors* (Phd. thesis). Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France.
- [20] Carazo, A., Roger, M. et Omais, M. (2011). Analytical prediction of wake-interaction noise in counter-rotation open rotors. Dans *the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Portland, Oregon, USA, 5-8 June*. No. 2011-2758.
- [21] Carton, X. et McWilliams, J. (1989). Barotropic and baroclinic instabilities of axisymmetric vortices in a quasigeostrophic model. *Elsevier oceanography series*, volume 50, p. 225–244.
- [22] Casalino, D. (2003). An advanced time approach for acoustic analogy predictions. *Journal of Sound and Vibration*, volume 261, numéro 4, p. 583–612.
- [23] Christophe, J. (2011). *Application of hybrid methods to high frequency aeroacoustics* (Phd. thesis). von Karman Institute for Fluid Dynamics, Bruxelles, Belgium.
- [24] Colin, Y., Blanc, F., Caruelle, B., Barrois, F. et Djordjevic, N. (2012). Computational strategy for predicting CROR noise at low-speed part ii : investigation of the noise sources computation with the chorochronic approach. Dans *the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Colorado Springs, Colorado, USA, 4-6 June*. No. 2012-2222.
- [25] Colin, Y., Carazo, A., Caruelle, B., Node-Langlois, T. et Parry, A. (2012). Computational strategy for predicting CROR noise at low-speed part i : review of the numerical methods. Dans *the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Colorado Springs, Colorado, USA, 4-6 June*. No. 2012-2221.
- [26] Colonius, T., Lele, S. K. et Moin, P. (1991). The free compressible viscous vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 230, p. 45–73.
- [27] Coton, F., Marshall, J., Galbraith, R. et Green, R. (2004). Helicopter tail rotor orthogonal blade vortex interaction. *Progress in Aerospace Sciences*, volume 40, numéro 7, p. 453–486.

- [28] Curle, N. (1955). The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, volume 231, numéro 1187, p. 505–514.
- [29] Danner, F. et Kendall-Torry, C. (2014). Effect of blade tip modifications for unducted propulsors on tip vortex-rotor interaction noise. Dans *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition, Dusseldorf, Germany, 16-20 June*, American Society of Mechanical Engineers. GT2014-27134.
- [30] de Laborderie, J., Moreau, S., Berry, A. et Posson, H. (2012). Several technological effects on tonal fan noise prediction. Dans *the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Colorado Springs, Colorado, USA, 4-6 June*. No. 2012-2131.
- [31] de Santana, L. (2015). *Semi-analytical methodologies for airfoil noise prediction* (Phd. thesis). KU Leuven, Belgium.
- [32] Delattre, G. et Falissard, F. (2014). Influence of torque ratio on counter-rotating open-rotor interaction noise. Dans *the 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Atlanta, GA, USA, 16-20 June*. No. 2014-2969.
- [33] Di Francescantonio, P. (1997). A new boundary integral formulation for the prediction of sound radiation. *Journal of Sound and Vibration*, volume 202, numéro 4, p. 491–509.
- [34] Dieste, M. et Gabard, G. (2012). Random particle methods applied to broadband fan interaction noise. *Journal of Computational Physics*, volume 231, numéro 24, p. 8133–8151.
- [35] Dittmar, J. H. (1985). Some design philosophy for reducing the community noise of advanced counter-rotation propellers. *NASA-TM-87099*.
- [36] Dittmar, J. H. (1986). Cruise noise of counterrotation propeller at angle of attack in wind tunnel. *NASA-TM-88869*.
- [37] Dittmar, J. H. (1987). The effect of front-to-rear propeller spacing on the interaction noise of a model counterrotation propeller at cruise conditions. *NASA-TM-101329*.
- [38] Dittmar, J. H. et Stang, D. B. (1987). Reduction of the noise of a model counter-rotation propeller at cruise by reducing the aft propeller diameter. *Journal of the Acoustical Society of America*, volume 81, numéro S1, p. S96–S96.
- [39] Dron, S. (2008). Toward ACARE 2020 : innovative engine architectures to achieve the environmental goals ? Dans *the 26th International Congress of the Aeronautical Sciences, Anchorage, Alaska, USA, 4-19 Sept*. No. 2008-595.
- [40] Envia, E. (1993). Prediction of noise field of a propfan at angle of attack. in *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics, and Aeroelasticity of Turbomachines and Propellers*, p. 685–703.
- [41] Envia, E. (1994). Asymptotic theory of supersonic propeller noise. *AIAA Journal*, volume 32, numéro 2, p. 239–246.

- [42] Envia, E. (2014). Contra-rotating open rotor tone noise prediction. Dans *the 20th AIAA-CEAS Aeroacoustics Conference, Atlanta, GA, USA, 16-20 June*. No. 2014-2606.
- [43] Fabre, D. (2002). *Instabilité et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avions* (Phd. thesis). Université Paris VI, Paris, France.
- [44] Falissard, F. et Delattre, G. (2014). Investigation of counter-rotating open-rotor orthogonal blade/vortex interaction noise. Dans *the 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Atlanta, GA, USA, 16-20 June*. No. 2014-2748.
- [45] Falissard, F., Lerat, A. et Sidès, J. (2008). Computation of airfoil-vortex interaction using a vorticity-preserving scheme. *AIAA Journal*, volume 46, numéro 7, p. 1614–1623.
- [46] Falissard, F., Zehner, P., Roger, M. et Gloerfelt, X. (2015). Numerical and analytical investigation of orthogonal blade/vortex interaction noise. Dans *the 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Dallas, Texas, USA, 22-26 June*. No. 2015-2843.
- [47] Farassat, F. (2007). Derivation of formulations 1 and 1a of farassat. *NASA/TM-2007-214853*.
- [48] Fernando, R. et Leroux, M. (2014). Open-rotor low speed aero-acoustics : wind tunnel characterization of an advanced blade design in isolated and installed configurations. Dans *the 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Atlanta, GA, USA, 16-20 June*. No. 2014-2749.
- [49] Ffowcs Williams, J. et Hawkins, D. L. (1969). Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 264, numéro 1151, p. 321–342.
- [50] Foss, R. L. et Hopkins, J. P. (1977). Potential of turboprop powerplants for fuel conservation. *Acta Astronautica*, volume 4, numéro 1, p. 53–75.
- [51] François, B., Laban, M., Costes, M., Dufour, G. et Boussuge, J.-F. (2014). In-plane forces prediction and analysis in high-speed conditions on a contra-rotating open rotor. *Journal of Turbomachinery*, volume 136, numéro 8, p. 081002.
- [52] Frisch, U., Hasslacher, B. et Pomeau, Y. (1986). Lattice-gas automata for the navier-stokes equation. *Physical review letters*, volume 56, numéro 14, p. 1505.
- [53] Fukumoto, Y. et Okulov, V. (2005). The velocity field induced by a helical vortex tube. *Physics of Fluids (1994-present)*, volume 17, numéro 10, p. 107101.
- [54] Gandhi, F. et Tauszig, L. (2000). A critical evaluation of various approaches for the numerical detection of helicopter blade vortex interactions. *Journal of the American Helicopter Society*, volume 45, numéro 3, p. 179–190.

- [55] Gerhart, G. M., Gross, R. J. et Hochstein, J. I. (1992). *Fundamentals of fluid mechanics*. Eddison-Wesley; 2nd edition edition (January 1992).
- [56] Giez, J., Vion, L., Roger, M. et Moreau, S. (2016). Effect of the edge-and-tip vortex on airfoil selfnoise and turbulence impingement noise. Dans *the 22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30 May - 1 June*. No. 2016-2996.
- [57] Goldstein, M. E. (1976). Aeroacoustics. *New York, McGraw-Hill International Book Co., 1976. 305 p.*, volume 1.
- [58] Goldstein, M. E. et Atassi, H. (1976). A complete second-order theory for the unsteady flow about an airfoil due to a periodic gust. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 74, numéro 04, p. 741–765.
- [59] Gomar, A., Bouvy, Q., Sicot, F., Dufour, G., Cinnella, P. et Francois, B. (2014). Convergence of fourier-based time methods for turbomachinery wake passing problems. *Journal of Computational Physics*, volume 278, p. 229–256.
- [60] Gordon, E. et Woodward, R. (1988). Noise of a model counterrotation propeller with reduced aft rotor diameter at simulated takeoff/approach conditions (f7/a3). *NASA-TM-100254*.
- [61] Gradshteyn, I. S. et Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series and products, eight edition*. Academic Press, preface by Daniel Zwillinger.
- [62] Graham, J. (1970). Similarity rules for thin aerofoils in non-stationary subsonic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 43, numéro 04, p. 753–766.
- [63] Grasso, G. (2017). *Aerodynamics and aeroacoustics optimization of low speed contra-rotating fan* (Phd. thesis). Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada et Von Karman Institute, Bruxelles, Belgium.
- [64] Gutin, L. (1948). On the sound field of a rotating propeller. *NACA-TM-1195, Langley Aeronautical Lab.; Langley Field, VA, United States*.
- [65] Hanson, D. et Fink, M. (1979). The importance of quadrupole sources in prediction of transonic tip speed propeller noise. *Journal of Sound and Vibration*, volume 62, numéro 1, p. 19–38.
- [66] Hanson, D. B. (1985). Noise of counter-rotation propellers. *Journal of Aircraft*, volume 22, numéro 7, p. 609–617.
- [67] Hanson, D. B. et Parzych, D. J. (1993). Theory for noise of propellers in angular inflow with parametric studies and experimental verification. *NASA-CR-4499*.
- [68] Hanson, D. J. K. (1980). Helicoidal surface theory for harmonic noise of propellers in the far field. *AIAA Journal*, volume 18, numéro 10, p. 1213–1220.
- [69] Hardin, J. C. (1982). The velocity field induced by a helical vortex filament. *Physics of Fluids (1958-1988)*, volume 25, numéro 11, p. 1949–1952.

- [70] Isom, M. P. (1975). The theory of sound radiated by a hovering transonic helicopter blade. *Poly-AE/AM, Polytechnic Institute of New York*, , numéro 75-4.
- [71] Iversen, J. D. (1976). Correlation of turbulent trailing vortex decay data. *Journal of Aircraft*, volume 13, numéro 5, p. 338–342.
- [72] Jaouani, N. (2016). *Modelling of Installation Effects on the Tonal Noise Radiated by Counter-Rotating Open Rotors*. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon.
- [73] Jaouani, N., Roger, M., Nodé-Langlois, T. et Serre, G. (2015). Analytical prediction of the pylon-wake effect on the tonal noise radiated by the front rotor of CROR propulsion systems. Dans *the 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Dallas, Texas, USA, 22-26 June*. No. 2015-2985.
- [74] Jaouani, N., Roger, M., Node-Langlois, T. et Serre, G. (2016). Effect of a model leading-edge vortex on the blade aerodynamic response for application to CROR tonal noise predictions. Dans *the 22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30 May - 1 June*. No. 2016-2744.
- [75] Jaron, R., Moreau, A. et Guérin, S. (2015). Extrapolation of rans flow data for improved analytical fan tone prediction. Dans *the 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Dallas, Texas, USA, 22-26 June*. No. 2015-2515.
- [76] Jeong, J. et Hussain, F. (1995). On the identification of a vortex. *Journal of fluid mechanics*, volume 285, p. 69–94.
- [77] Jurdic, V., Joseph, P. et Antoni, J. (2009). Investigation of rotor wake turbulence through cyclostationary spectral analysis. *AIAA Journal*, volume 47, numéro 9, p. 2022–2030.
- [78] Juvé, D. (2009). Aeroacoustics research in europe : The ceas-asc report on 2008 highlights. *Journal of Sound and Vibration*, volume 328, numéro 1, p. 213–242.
- [79] Kingan, M. J. (2013). Open rotor broadband interaction noise. *Journal of Sound and Vibration*, volume 332, numéro 17, p. 3956–3970.
- [80] Kingan, M. J., Powles, C. et Self, R. H. (2010). Effect of centerbody scattering on advanced open-rotor noise. *AIAA Journal*, volume 48, numéro 5, p. 975–980.
- [81] Kingan, M. J. et Self, R. H. (2009). Counter-rotation propeller tip vortex interaction noise. Dans *the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Miami, Florida, USA, 1-12 May*. No. 2009-3135.
- [82] Kirde, K. (1962). Untersuchungen über die zeitliche weiterentwicklung eines wirbels mit vorgegebener anfangsverteilung. *Ingenieur-Archiv*, volume 31, p. 385–404.
- [83] Kitaplioglu, C., Caradonna, F. et McClur, M. (1999). An experimental study of parallel blade-vortex interaction aerodynamics and acoustics utilizing and independently generated vortex. *NASA/TM-1999-208790*.
- [84] Kok, J. C. (2000). Resolving the dependence on freestream values for the k-turbulence model. *AIAA journal*, volume 38, numéro 7, p. 1292–1295.

- [85] Kok, J. C. (2006). A symmetry and dispersion-relation preserving high-order scheme for aeroacoustics and aerodynamics. Dans *ECCOMAS CFD 2006 : Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, Egmond aan Zee, The Netherlands, September 5-8, 2006*, Delft University of Technology ; European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS). TP-2006-525.
- [86] Kucukcoskun, K., Christophe, J., Schram, C., Anthoine, J. et Tournour, M. (2010). A geometrical near-field extension of amiet’s theory for spanwise varying incoming turbulence noise and broadband noise scattering. *ISMA paper 2010*, volume 690, p. 4.
- [87] Lallier-Daniel, D., Moreau, S., Sanjosé, M. et Pérot, F. (2013). Numerical analysis of axial fans for performance and noise evaluation using the lattice-boltzmann method. Dans *the 21th Annual Conference of the CFD Society of Canada, Sherbrooke, Quebec, CANADA, 6-9 May*. p. 6–9.
- [88] Landahl, M. (1961). *Unsteady transonic flow*. Cambridge University press, ISBN 0-521-35664-4.
- [89] Leonard, A. (1975). Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in geophysics*, volume 18, p. 237–248.
- [90] Leonard, T., Sanjose, M., Moreau, S. et Duchaine, F. (2016). Large eddy simulation of a scale-model turbofan for fan noise source diagnostic. Dans *the 22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30 May - 1 June*. No. 2016-3000.
- [91] Lesieur, M. (2012). *Turbulence in fluids, third revised and enlarged edition*. Springer Science & Business Media.
- [92] Liepmann, H., Laufer, J. et Liepmann, K. (1951). On the spectrum of isotropic turbulence.
- [93] Lighthill, M. J. (1963). Jet noise. *AIAA Journal*, volume 1, numéro 7, p. 1507–1517.
- [94] Liou, M.-S. (1996). A sequel to ausm : Ausm+. *Journal of computational Physics*, volume 129, numéro 2, p. 364–382.
- [95] Lugt, H. J. (1983). Vortex flow in nature and technology. *New York, Wiley-Interscience, 1983, 305 p. Translation.*, volume 1.
- [96] Majjigi, R., Uenishi, K. et Gliebe, P. (1989). An investigation of counterrotating tip vortex interaction. *NASA CR-185135*.
- [97] Marié, S. (2008). *Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [98] Marié, S., Ricot, D. et Sagaut, P. (2009). Comparison between lattice boltzmann method and navier–stokes high order schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, volume 228, numéro 4, p. 1056–1070.

- [99] Marshall, J. (1994). Vortex cutting by a blade. i-general theory and a simple solution. *AIAA Journal*, volume 32, numéro 6, p. 1145–1150.
- [100] Marshall, J. et Grant, J. (1996). Penetration of a blade into a vortex core : vorticity response and unsteady blade forces. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 306, p. 83–109.
- [101] Masson, V., Posson, H., Sanjose, M., Léonard, T., Moreau, S. et Roger, M. (2016). Fan-ogv interaction broadband noise prediction in a rigid annular duct with swirling and sheared mean flow. Dans *the 22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30 May - 1 June*. No. 2016-2944.
- [102] Menter, F. R. (1993). Zonal two equation k-turbulence models for aerodynamic flows. Dans *the 24th AIAA Fluid Dynamics Conference, Orlando, FL, USA, 6-9 Jul*. No. 1993-2906.
- [103] Mitchell, A. M., Morton, S. A., Forsythe, J. R. et Cummings, R. M. (2006). Analysis of delta-wing vortical substructures using detached-eddy simulation. *AIAA journal*, volume 44, numéro 5, p. 964–972.
- [104] Moore, D. et Saffman, P. (1973). Axial flow in laminar trailing vortices. Dans *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society. volume 333. p. 491–508.
- [105] Moreau, S., Henner, M. et Neal, D. (2005). 3d rotor-stator interaction in automotive engine cooling fan systems. Dans *Proc. 6th European Conference on Turbomachinery, Lille*.
- [106] Moreau, S. et Roger, M. (2007). Competing broadband noise mechanisms in low-speed axial fans. *AIAA Journal*, volume 45, numéro 1, p. 48–57.
- [107] Moreau, S., Roger, M. et Jurdic, V. (2005). Effect of angle of attack and airfoil shape on turbulence-interaction noise. Dans *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, USA, 23-25 May*. No. 2005-2973.
- [108] Moreau, S., Sanjosé, M., Perot, F. et Kim, M.-S. (2011). Direct self-noise simulation of the installed controlled diffusion airfoil. Dans *the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Portland, Oregon, USA, 5-8 June*. No. 2011-2716.
- [109] Nallasamy, M. et Envia, E. (2005). Computation of rotor wake turbulence noise. *Journal of Sound and Vibration*, volume 282, numéro 3, p. 649–678.
- [110] Neufville, A. D. (1957). The dying vortex. Dans *the Fifth Midwestern Conf. on Fluid Mechanics, University of Michigan, Detroit, MI, USA*. p. 365–375.
- [111] Newman, B. G. (1959). Flow in a viscous trailing vortex. *Aeronautical Quarterly*, volume 10, numéro 2, p. 149–162.
- [112] Nodé-Langlois, T., Wlassow, F., Languille, V., Colin, Y., Caruelle, B., Gill, J., Chen, X., Zhang, X. et Parry, A. (2014). Prediction of contra-rotating open rotor broad-

- band noise in isolated and installed configurations. Dans *the 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Atlanta, GA, USA, 16-20 June*. p. No. 2014–2610.
- [113] Oseen, C. (1911). *Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit*. Almqvist & Wiksells.
- [114] Parry, A. et Crighton, D. (1989). Asymptotic theory of propeller noise. i-subsonic single-rotation propeller. *AIAA journal*, volume 27, numéro 9, p. 1184–1190.
- [115] Parry, A., Kingan, M. et Tester, B. (2011). Relative importance of open rotor tone and broadband noise sources. Dans *the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Portland, Oregon, USA, 5-8 June*. p. No. 2011–2763.
- [116] Peake, N. (1994). The unsteady lift on a swept blade tip. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 271, p. 87–101.
- [117] Peters, A. et Spakovszky, Z. S. (2012). Rotor interaction noise in counterrotating propfan propulsion systems. *Journal of Turbomachinery*, volume 134, numéro 1, p. pp. 011002.
- [118] Pope, S. B. (2000). Turbulent flows. *Turbulent Flows, by Stephen B. Pope, pp. 806. ISBN 0521591252. Cambridge, UK : Cambridge University Press, September 2000.*, p. 806.
- [119] Posson, H. et Peake, N. (2013). The acoustic analogy in an annular duct with swirling mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 726, p. 439–475.
- [120] Post, F. H., Ma, B., Banks, D. C., Pagendarm, H.-G. *et al.* (1998). Selective visualization of vortices in hydrodynamic flows. Dans *Visualization'98. Proceedings*, IEEE. p. 419–422.
- [121] Potel, C. et Bruneau, M. (2006). *Acoustique Générale-équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*. Ellipse collection Technosup.
- [122] Rao, J. (1994). *Turbomachine unsteady aerodynamics*. New Age International, ISBN 81-224-0652-X.
- [123] Reissner, E. (1951). On the application of mathieu functions in the theory of subsonic compressible flow past oscillating airfoils. *NACA Technical Note 2363*.
- [124] Reynolds, B. et Lakshminarayana, B. (1979). *Characteristics of Lightly Loaded Fan Rotor Blade Wakes* (Rapport technique). NASA-CR-3188.
- [125] Robinson, S. K. (1991). Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, volume 23, numéro 1, p. 601–639.
- [126] Roger, M. et Carazo, A. (2010). Blade-geometry considerations in analytical gust-airfoil interaction noise models. Dans *the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden, May*. No. 2010-3799.

- [127] Roger, M. et Moreau, S. (2005). Back-scattering correction and further extensions of amiet's trailing-edge noise model. part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, volume 286, numéro 3, p. 477–506.
- [128] Roger, M., Schram, C. et Moreau, S. (2014). On vortex–airfoil interaction noise including span-end effects, with application to open-rotor aeroacoustics. *Journal of Sound and Vibration*, volume 333, numéro 1, p. 283–306.
- [129] Rohrbach, C. et Metzger, F. (1976). Propfan, a new look in propulsors. Dans *Astronautics & Aeronautics*. volume 14. American Institute of Aero & Astro, p. B28–B28.
- [130] Rozenberg, Y. (2007). *Modélisation analytique du bruit aérodynamique à large bande des machines tournantes : utilisation de calculs moyennés de mécanique des fluides*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [131] Rozenberg, Y., Robert, G. et Moreau, S. (2012). Wall-pressure spectral model including the adverse pressure gradient effects. *AIAA journal*, volume 50, numéro 10, p. 2168–2179.
- [132] Sanjosé, M. et Moreau, S. (2015). *Optibruui_struc : Theoretical Guide* (Notice théorique optibruui, software tag : 6.1.3). Université de Sherbrooke, Sherbrooke, QC, Canada.
- [133] Sanjosé, M., Moreau, S., Pestana, M. et Roger, M. (2016). Influence and modeling of ogv heterogeneity. Dans *the 22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30 May - 1 June*. No. 2016-2881.
- [134] Santana, L. D., Schram, C. et Desmet, W. (2016). Low-frequency extension of amiet's theory for compact airfoil noise predictions. *Journal of Sound and Vibration*, volume 372, p. 342–356.
- [135] Schlinker, R. et Amiet, R. (1983). Rotor-vortex interaction noise. Dans *the 8th Aeroacoustics Conference, Atlanta , GA, USA*. 1983-720.
- [136] Schwarzschild, K. (1901). Die beugung und polarisation des lichts durch einen spalt. i. *Mathematische Annalen*, volume 55, numéro 2, p. 177–247.
- [137] Scully, M. (1975). *Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads* (Phd thesis). Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA.
- [138] Sears, W. R. (1941). Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application. *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, volume 8, numéro 3.
- [139] Silverstein, A., Katzoff, S. et Bullivant, W. K. (1939). *Downwash and wake behind plain and flapped airfoils* (Rapport technique). NACA-TR-651.

- [140] Soulat, L., Kernemp, I. et Fernando, R. (2013). Numerical assessment of noise emission of counter-rotating open rotors. Dans *the 10th European Turbomachinery Conference, Lappeerenta, Finland*. ETC2013-210.
- [141] Soulat, L., Kernemp, I., Sanjose, M., Moreau, S. et Fernando, R. (2013). Assessment and comparison of tonal noise models for counter-rotating open rotors. Dans *the 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Berlin, Germany, 27-29 May*. p. No. 2013-2201.
- [142] Soulat, L., Kernemp, I., Sanjose, M., Moreau, S. et Fernando, R. (2016). Numerical assessment of the tonal noise of counter-rotating open rotors at approach. *International Journal of Aeroacoustics*, volume No. 15 (1-2), p. pp. 23-40.
- [143] Soulat, L., Moreau, S. et Posson, H. (2011). Wake model effects on the prediction of turbulence-interaction broadband noise in a realistic compressor stage. Dans *41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. No. 2011-3900.
- [144] Spalart, P. R. (1998). Airplane trailing vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, volume 30, numéro 1, p. 107-138.
- [145] Squire, H. (1965). The growth of a vortex in turbulent flow. *Aeronautical Quarterly*, volume 16, p. 302-306.
- [146] Strack, W. C., Knip, G., Weisbrich, A., Godston, J. et Bradley, E. (1981). Technology and benefits of aircraft counter rotation propellers. *NASA-TM-82983*.
- [147] Strawn, R. C., Kenwright, D. N. et Ahmad, J. (1999). Computer visualization of vortex wake systems. *AIAA journal*, volume 37, numéro 4, p. 511-512.
- [148] Stuermer, A. et Yin, J. (2009). Low-speed aerodynamics and aeroacoustics of CROR propulsion systems. Dans *the 28th AIAA applied Aerodynamics Conference, Chicago, Illinois, USA, 28 June - 01 July*. No. 2009-3134.
- [149] Sujudi, D. et Haimes, R. (1995). Identification of swirling flow in 3d vector fields. Dans *12th Computational Fluid Dynamics Conference San Diego, CA, USA*. No. 1995-1715.
- [150] Tadghighi, H. (1989). An analytical model for prediction of main rotor, p. 1989-1130.
- [151] Tam, C. K. (1995). Computational aeroacoustics-issues and methods. *AIAA journal*, volume 33, numéro 10, p. 1788-1796.
- [152] Tam, C. K. et Webb, J. C. (1993). Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of computational physics*, volume 107, numéro 2, p. 262-281.
- [153] Taylor, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, p. 289-343.
- [154] Truesdell, C. (1954). *The kinematics of vorticity*. Indiana University Press, 232 p.

- [155] Van Zante, D., Gazzaniga, J., Elliott, D. et Woodward, R. (2011). An open rotor test case : F31/A31 historical baseline blade set. Dans *the XX International Symposium on Air Breathing Engines, Gothenburg, Sweden, 12-16 Sept.* p. No. 2011–1310.
- [156] Van Zante, D. E. et Wernet, M. P. (2012). Tip vortex and wake characteristics of a counterrotating open rotor. Dans *the 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. AIAA, 30 July - 01 Aug., Atlanta, Col., USA.* No. 2012-4039.
- [157] Vatistas, G. H. (1998). New model for intense self-similar vortices. *Journal of Propulsion and Power*, volume 14, numéro 4, p. 462–469.
- [158] Vatistas, G. H., Kozel, V. et Mih, W. (1991). A simpler model for concentrated vortices. *Experiments in Fluids*, volume 11, numéro 1, p. 73–76.
- [159] Ventres, C., Theobald, M. et Mark, W. (1982). *Turbofan noise generation. Volume 1 : analysis* (Rapport technique). NASA-CR-167951.
- [160] Vion, L. (2013). *Modifications des tourbillons d’extrémité d’hélices contra-rotatives en vue d’une réduction des nuisances sonores* (Phd. thesis). Ecole Polytechnique, Paris, France.
- [161] Vion, L., Delattre, G., Falissard, F. et Jacquin, L. (2011). Counter-rotating open rotor (CROR) : flow physics and simulation. 2011-627.
- [162] Von Karman, T. (1937). The fundamentals of the statistical theory of turbulence. *Journal of the Aeronautical Sciences*, volume 4, numéro 4, p. 131–138.
- [163] Waterson, N. P. et Deconinck, H. (2007). Design principles for bounded higher-order convection schemes—a unified approach. *Journal of Computational Physics*, volume 224, numéro 1, p. 182–207.
- [164] Watson, G. (1945). *A treatise on the theory of Bessel functions, second edition.* Cambridge University Press, 0002–9904 p.
- [165] Widnall, S. E. (1975). The structure and dynamics of vortex filaments. *Annual Review of Fluid Mechanics*, volume 7, numéro 1, p. 141–165.
- [166] Woodward, R. P. (1987). Measured noise of a scale model high speed propeller at simulated takeoff/approach conditions. Dans *the 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nev. USA, 12-15 Jan. 1987.* volume 1. p. 12–15.
- [167] Wu, J.-Z., Ma, H.-Y. et Zhou, M.-D. (2007). Vorticity and vortex dynamics. *Springer Science & Business Media*.
- [168] Zawodny, N. S., Nark, D. M. et Boyd Jr, D. D. (2015). Assessment of geometry and in-flow effects on contra-rotating open rotor broadband noise predictions. *NF1676L-18963*.
- [169] Zehner, P., Falissard, F. et Gloerfelt, X. (2016). Aeroacoustic study of the interaction of a rotating blade with a batchelor vortex. Dans *the 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France, 30th May - 1st June.* No. 2016-2999.